

Instituto de Física  
Universidade de São Paulo

**Correlações e Ruído de Intensidade e de Fase  
em Transparência Induzida  
Eletromagneticamente: Experimentos  
e Teorias**

**José Gabriel Aguirre Gómez**

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade  
de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção  
do Grau de Doutor em Ciências.

**Orientador: Prof. Dr. Paulo Alberto Nussenzveig**

**Banca examinadora:**

**Prof. Dr. João Carlos Alves Barata (IFUSP)**

**Prof. Dr. Kaled Dechoum (UFF)**

**Profª. Dra. Maria Aparecida Gonçalves Martinez (Mackenzie)**

**Prof. Dr. Sebastião José Nascimento de Pádua (UFMG)**

**São Paulo, 20 de Abril de 2004**



# Conteúdo

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>   | <b>17</b> |
| <b>2</b> | <b>Descrições do campo eletromagnético</b>  | <b>21</b> |
| 2.1      | Introdução . . . . .  | 21        |
| 2.2      | Campo eletromagnético clássico . . . . .  | 22        |
| 2.3      | Campo eletromagnético clássico com fase estocástica . . . . .                             | 23        |
| 2.4      | Campo eletromagnético quântico . . . . .  | 28        |
| 2.4.1    | Relações de comutação . . . . .   | 34        |
| 2.4.2    | Operadores de quadratura . . . . .  | 34        |
| 2.4.3    | Flutuações quânticas . . . . .  | 36        |
| 2.4.4    | Estados coerentes e comprimidos . . . . .   | 38        |
| 2.5      | Medida das propriedades estatísticas do campo eletromagnético                             | 40        |
| 2.5.1    | Deteção homodina . . . . .  | 41        |
| 2.5.2    | Medidas do ruído usando uma cavidade vazia . . . . .                                      | 43        |
| 2.6      | Comentários finais . . . . .  | 51        |
| <b>3</b> | <b>Aprisionamento coerente de população e transparência induzida eletromagneticamente</b> | <b>53</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .  | 53        |
| 3.2      | Aprisionamento coerente de população . . . . .  | 54        |
| 3.3      | Discussão do fenômeno . . . . .   | 55        |
| 3.3.1    | Matriz densidade . . . . .  | 55        |
| 3.3.2    | Resultados numéricos . . . . .  | 58        |
| 3.3.3    | Estados acoplados e não-acoplados . . . . .   | 60        |
| 3.3.4    | Estados vestidos . . . . .  | 62        |
| 3.4      | Transparência induzida por laser . . . . .  | 64        |
| 3.5      | Comentários finais . . . . .  | 66        |
| <b>4</b> | <b>Resultados experimentais</b>   | <b>69</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .  | 69        |
| 4.2      | Dispositivos, técnicas e medidas de calibração . . . . .                                  | 70        |
| 4.2.1    | Deteção balanceada . . . . .  | 71        |
| 4.2.2    | Calibração da medida do shot noise . . . . .  | 72        |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.3      | Medidas do ruído de intensidade, de fase e das correlações entre os feixes de bombeio e sonda na EIT . . . . . | 73         |
| 4.3.1    | Primeira montagem experimental . . . . .   | 73         |
| 4.3.2    | Sinal DC de transparência induzida . . . . .   | 74         |
| 4.3.3    | Ruído dos feixes de bombeio e sonda antes de interagir com os átomos . . . . .                                 | 76         |
| 4.3.4    | Ruído de intensidade dos feixes de bombeio e sonda na EIT . . . . .  | 77         |
| 4.3.5    | Medidas de correlação e anti-correlação . . . . .  | 79         |
| 4.3.6    | Segunda montagem experimental . . . . .  | 81         |
| 4.3.7    | Novas medidas de ruído de intensidade dos campos e correlações . . . . .                                       | 82         |
| 4.3.8    | Medida do ruído de quadratura fase de um feixe . . . . .   | 92         |
| 4.3.9    | Medida de correlação de quadratura fase entre os campos na EIT . . . . .                                       | 93         |
| 4.4      | Comentários finais . . . . .   | 94         |
| <b>5</b> | <b>Modelo quântico para EIT</b>  | <b>97</b>  |
| 5.1      | Introdução . . . . .   | 97         |
| 5.2      | Hamiltoniano do sistema . . . . .  | 97         |
| 5.3      | Equações quânticas de Langevin dos operadores do sistema . . . . .   | 101        |
| 5.3.1    | Equações dos campos intracavidade . . . . .  | 101        |
| 5.3.2    | Equações dos operadores atômicos macroscópicos . . . . .   | 102        |
| 5.4      | Estado estacionário e flutuações quânticas . . . . .   | 104        |
| 5.4.1    | Valores médios dos operadores no estado estacionário . . . . .   | 105        |
| 5.4.2    | Flutuações e ruído quântico . . . . .  | 106        |
| 5.5      | Previsões teóricas . . . . .   | 111        |
| 5.5.1    | Parâmetros usados . . . . .  | 112        |
| 5.5.2    | Estado estacionário . . . . .  | 113        |
| 5.5.3    | Ruído de quadratura dos campos e correlações . . . . .   | 115        |
| 5.6      | Comentários finais . . . . .   | 119        |
| <b>6</b> | <b>Modelo Estocástico para EIT</b>   | <b>121</b> |
| 6.1      | Introdução . . . . .   | 121        |
| 6.2      | O sistema . . . . .  | 122        |
| 6.3      | Valores médios no estado estacionário . . . . .  | 125        |
| 6.3.1    | Cálculo de Itô . . . . .   | 125        |
| 6.4      | Espectro de ruído . . . . .  | 128        |
| 6.4.1    | Matriz de covariância . . . . .  | 128        |
| 6.4.2    | Espectro de ruído . . . . .  | 132        |
| 6.5      | Previsões teóricas no estado estacionário . . . . .  | 135        |
| 6.5.1    | Estrutura internas . . . . .   | 142        |
| 6.6      | Comentários finais . . . . .   | 146        |

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>7</b> | <b>Conclusões e comentários finais</b>                          | <b>149</b> |
| <b>A</b> | <b>Densidade espectral e teorema de Wiener–Khintchine</b>       | <b>153</b> |
| A.1      | Teorema de Wiener-Khintchine . . . . .                          | 153        |
| A.2      | Singularidades da densidade espectral . . . . .                 | 155        |
| A.3      | Correlações cruzadas e densidades espectrais cruzadas . . . . . | 156        |
| <b>B</b> | <b>Cálculo de Itô</b>   | <b>157</b> |
| B.1      | Exemplo de equação diferencial estocástica . . . . .            | 157        |
| B.2      | Alguns conceitos básicos . . . . .                              | 159        |
| B.2.1    | Processo estocástico . . . . .                                  | 159        |
| B.2.2    | Processo de Markov . . . . .                                    | 159        |
| B.2.3    | Processo de Wiener . . . . .                                    | 160        |
| B.2.4    | A integral estocástica . . . . .                                | 160        |
| <b>C</b> | <b>Relações entre os campos para uma cavidade vazia</b>         | <b>163</b> |
| C.1      | Dinâmica dos campos intracavidade e de saída na cavidade vazia  | 163        |
| C.1.1    | Relação de comutação do campo intracavidade . . . . .           | 166        |
| C.2      | Flutuações do campo intracavidade . . . . .                     | 168        |
| <b>D</b> | <b>Forças atômicas de Langevin</b>                              | <b>171</b> |
| D.1      | Álgebra dos operadores atômicos . . . . .                       | 172        |



# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Representação de um estado coerente no espaço de fase. . . . .  | 39 |
| 2.2 | Esquema básico para a detecção homodina. BS <sub>1</sub> : divisor de feixe; D <sub>1,2</sub> :<br>detetores; $\pm$ : misturador de fotocorrentes; A.S: analisador de espectros. . .  | 42 |
| 2.3 | Desenho esquemático da montagem para medidas do ruído de quadraturas<br>de um campo através do feixe que sai de uma cavidade Fabry-Perot. I.O:<br>Isolador Ótico; PBS <sub>1,2</sub> : Divisor de feixe polarizante; A.S.: Analisador de<br>Espectros; D <sub>1,2</sub> : Detetores; $\pm$ : misturador de fotocorrentes. . . . .   | 44 |
| 2.4 | Ângulo de rotação da elipse do ruído do campo $\Theta_1(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa)$ em função da<br>dessintonia $\Delta_\kappa$ para dois diferentes valores de frequência de análise. $\Omega_\kappa = 1$<br>curva (a) e $\Omega_\kappa = 10$ curva (b). . . . .  | 48 |
| 2.5 | Ângulo de rotação relativo da elipse do ruído $\Theta(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa)$ em função da<br>dessintonia $\Delta_\kappa$ . $\Omega_\kappa = 1$ curva (a) e $\Omega_\kappa = 10$ curva (b). . . . .  | 51 |
| 3.1 | Sistema de três níveis na configuração $\Lambda$ . Níveis $ 1\rangle$ e $ 2\rangle$ são acoplados ao<br>nível $ 0\rangle$ por transições de dipolo elétrico. . . . .  | 56 |
| 3.2 | (a) População do estado excitado $\rho_{00}$ , no estado estacionário, em função da<br>dessintonia do feixe do campo $2\delta_{L2}$ , mostrando o típico comportamento de<br>aprisionamento coerente de população. (b) Populações dos estados funda-<br>mentais $\rho_{11}$ (vermelha) e $\rho_{22}$ (azul), respectivamente. $\Omega_{R1} = \Omega_{R2} = 0, 2\Gamma_0$ ,<br>$\Gamma_{12} = 0, 001\Gamma_0$ , $\delta_{L1} = 0$ . . . . .                    | 59 |
| 3.3 | Parte imaginária [absorção (a)] e parte real [índice de refração (b)] da<br>coerência ótica da transição $ 0\rangle \rightarrow  2\rangle$ , $\Im m(\rho_{02} =  0\rangle\langle 2 )$ e $\Re e(\rho_{02} =  0\rangle\langle 2 )$ ,<br>respectivamente, em função da dessintonia do feixe do campo $2\delta_{L2}$ e no<br>estado estacionário. . . . .   | 60 |
| 3.4 | Acoplamentos e taxas de perda efetivas para os estados $ 0\rangle$ , $ NC\rangle$ e $ C\rangle$ .<br>O estado $ C\rangle$ é acoplado ao estado $ 0\rangle$ pela interação com os campos, com<br>elementos de matriz $\Omega_R\sqrt{2}$ ; como resultado deste acoplamento, o estado<br>$ C\rangle$ ganha uma taxa de perda $\Gamma'$ . Os estados $ NC\rangle$ e $ C\rangle$ são acoplados<br>através das taxas de relaxação dos níveis fundamentais. . . . . | 61 |
| 4.1 | Níveis de energia da transição D <sub>2</sub> do $^{85}\text{Rb}$ de $\lambda = 780,02 \text{ nm}$ de compri-<br>mento de onda. O valor em $MHz$ indica a separação em frequência entre<br>os diferentes níveis de momento angular total F. . . . .   | 70 |

---

|      |  |    |
|------|--|----|
| 4.2  | Curvas de calibração da medida do shot noise em função da tensão (DC Level) em um dos detetores. O zero de ambas curvas corresponde à tensão do detetor com o sinal do ruído eletrônico. . . . .   | 72 |
| 4.3  | Primeira montagem experimental para medida do ruído dos feixes na transparência induzida eletromagneticamente, EIT, em célula de vapor. DL <sub>1,2</sub> : diodo laser com cavidade estendida; IO: isolador ótico; LV: lâmina de vidro comum; M: espelhos; PBS: cubos divisores de feixe polarizantes; D <sub>1,2</sub> detetores; ±: misturador. . . . .   | 73 |
| 4.4  | <b>Curva superior:</b> Transparência induzida por laser para o feixe do sonda em função da dessintonia do mesmo. <b>Curva inferior:</b> Espectro de absorção saturada do feixe sonda. As intensidades dos feixes de bombeio e sonda, antes de interagir com os átomos são, respectivamente, 126,1 $mW/cm^2$ e 80,2 $mW/cm^2$ . . . . .   | 75 |
| 4.5  | Sinal de batimento dos laser de bombeio e sonda em função da frequência de análise. A curva vermelha corresponde a um ajuste Lorentziano da medida. 76   | 76 |
| 4.6  | Espectro do ruído de intensidade dos feixes sonda (esquerda) e do bombeio (direita) na condição de EIT em função da dessintonia do feixe sonda $\Delta_{L2}$ . $I_s = 13,41 mW/cm^2$ ; $I_b = 20,49 mW/cm^2$ ; frequência de análise $\Omega = 10 MHz$ . . . . .   | 77 |
| 4.7  | Espectro do ruído de intensidade dos feixes sonda (esquerda) e do bombeio (direita) na condição de EIT em função da dessintonia do feixe sonda $\Delta_{L2}$ . $I_s = 64,4 mW/cm^2$ ; $I_b = 63,3 mW/cm^2$ ; frequência de análise $\Omega = 10 MHz$ . 78  | 78 |
| 4.8  | <b>Ruído da soma (preta) e da diferença (vermelha) em função da dessintonia do feixe sonda <math>\Delta_{L2}</math>:</b> (esquerda) $I_s = 20,49 mW/cm^2$ , $I_b = 13,41 mW/cm^2$ e $\Omega = 10 MHz$ ; Shot noise $\approx -74 dBm$ . (direita) $I_s = 64,4 mW/cm^2$ , $I_b = 63,3 mW/cm^2$ e $\Omega = 10 MHz$ ; Shot noise $\approx -73 dBm$ . . . . .  | 79 |
| 4.9  | Segunda montagem experimental para o estudo de ruído de quadraturas e correlações em EIT. DL <sub>1,2</sub> : Diodos lasers; M Espelhos planos; LV: Lâminas de vidro; D <sub>1,2,3,4</sub> detetores; IO: Isolador ótico; PZT: Cerâmica piezo-elétrica, R <sub>1</sub> : espelhos circulares de coeficientes de reflexão $\mathcal{R}_1 < 1$ ; R: Espelhos circulares de coeficientes de reflexão $\mathcal{R} \approx 1$ ; PBS: divisor de feixe polarizante. . . . . | 81 |
| 4.10 | Sinal de absorção saturada do feixe de bombeio (esquerda) e sinal DC de EIT (direita). As curvas vermelhas correspondem ao valor médio dos sinais de lock-in dos respectivos feixes. . . . .   | 83 |
| 4.11 | Medida do espectro de ruído dos feixes de bombeio (direita) e sonda (esquerda) em ausência de átomos e em função da frequência de análise. Feixes com igual intensidade na região de interação e de valor 118 $mW/cm^2$ . Ruído do feixe (curva preta); shot noise (curva vermelha); ruído eletrônico (curvas azul e cian). . . . .  | 85 |



---

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 4.12 | Medida do espectro de ruído dos feixes de bombeio e sonda com átomos e em função da frequência de análise. Feixes com igual intensidade na região de interação e de valor $118 \text{ mW/cm}^2$ . Ruído do feixe (curva preta); shot noise (curva vermelha); ruído eletrônico (curvas azul e cian). . . . .  | 86  |
| 4.13 | Esquerda: Ruído da soma (preta) e da diferença (vermelha) de intensidade dos feixes de bombeio e sonda em presença (superiores) e ausência (inferiores) dos átomos, respectivamente. Direita: Coeficientes de correlação com átomos (inferior), sem átomos (superior). . . . .   | 87  |
| 4.14 | Variação do coeficientes de correlação, $\mathcal{C}_{P12}(\Omega)$ , de intensidade entre os feixes de bombeio e sonda na EIT. $\Omega = 10 \text{ MHz}$ (curva vermelha); $\Omega = 3.5 \text{ MHz}$ (curva azul). Médias em 60000 medidas. . . . .  | 88  |
| 4.15 | Ruído da soma $S_{P+}(\Omega)$ (curva preta) e da diferença $S_{P-}(\Omega)$ (curva vermelha) de intensidade dos feixes em função da dessintonia do feixe sonda $\Delta_{L2}$ , para diferentes valores de frequência de análise. (a) $\Omega = 2 \text{ MHz}$ ; (b) $\Omega = 6 \text{ MHz}$ ; (c) $\Omega = 10 \text{ MHz}$ e (d) $\Omega = 15 \text{ MHz}$ . Para todas as curvas $I_1 = I_2 = 50 \text{ mW/cm}^2$ . . . . .                                | 90  |
| 4.16 | Ruído da soma $S_{P+}(\Omega)$ (curva preta) e da diferença $S_{P-}(\Omega)$ (curva vermelha) das intensidade dos feixes, em função da dessintonia do sonda $\Delta_{L2}$ , para diferentes valores de intensidade dos feixes incidentes. (a) $I_1 = I_2 = 16 \text{ mW/cm}^2$ ; (b) $I_1 = I_2 = 50 \text{ mW/cm}^2$ ; (c) $I_1 = I_2 = 80 \text{ mW/cm}^2$ e (d) $I_1 = I_2 = 112 \text{ mW/cm}^2$ . Para todas as curvas $\Omega = 2 \text{ MHz}$ . . . . . | 91  |
| 4.17 | Medida de ruído no feixe refletido por uma cavidade. Os máximos de ruído correspondem a medida do ruído de quadratura fase do laser de diodo. . . . .  | 92  |
| 4.18 | Ruído da soma $S_{P,Q+}(\Omega)$ (curva preta) e da diferença $S_{P,Q-}(\Omega)$ (curva azul) das intensidades e das fases dos campos, em função da dessintonia da cavidade $\Delta_c$ , para diferentes valores da intensidade dos campos incidentes. (a) $I_1 = I_2 = 38.6 \text{ mW/cm}^2$ ; (b) $I_1 = I_2 = 116 \text{ mW/cm}^2$ . Para todas as curvas $\Omega = 10 \text{ MHz}$ . . . . .   | 94  |
| 5.1  | Átomo de três níveis de energia na configuração $\Lambda$ interagindo com os campos de frequência $\omega_{L1}$ (bombeio) e $\omega_{L2}$ (sonda), respectivamente; $\Gamma$ : taxa de emissão espontânea total do estado excitado; $\Gamma_{12}$ : taxa de perda da coerência entre os estados fundamentais. . . . .  | 98  |
| 5.2  | Curvas com a parte real dos autovalores da matriz $\mathbf{A}_S$ no cálculo das flutuações dos operadores do sistema acoplado átomos-campos intracavidade. $\mathcal{N} = 1 \times 10^4$ ; $\beta_1 = 89$ (esquerda) e $\beta_1 = 447$ (direita); $\beta_2 = 240$ para ambas curvas. . . . .   | 114 |
| 5.3  | Curvas com a parte imaginária da susceptibilidade $\chi_2$ , Eq.(5.75). $\mathcal{N} = 1 \times 10^4$ ; (a) $\beta_1 = 60$ e (b) $\beta_1 = 240$ ; $\beta_2 = 240$ para ambas curvas. . . . .  | 114 |
| 5.4  | Curvas com o ruído da quadratura amplitude dos campos detetados. (a); campo de bombeio $V_1^s(\Omega, \theta = 0)$ e (b); campo sonda $V_2^s(\Omega, \phi = 0)$ . Frequência de análise $\Omega = 2\pi \times (2 \text{ MHz})$ . . . . .   | 115 |

---

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 5.5 | Curvas com o ruído da quadratura fase dos campos detetados. (a); campo de bombeio $V_1^s(\Omega, \theta = \pi/2)$ e (b); campo sonda $V_2^s(\Omega, \phi = \pi/2)$ . Frequência de análise $\Omega = 2\pi \times (2 \text{ MHz})$ . . . . .  | 116 |
| 5.6 | Curvas com o ruído da soma e da diferença da intensidades dos campos detetados. (a); quadratura amplitude: curva vermelha $V_+^s(\Omega, \theta = \phi = 0)$ e curva azul $V_-^s(\Omega, \theta = \phi = 0)$ ; (b); quadratura fase: curva vermelha $V_+^s(\Omega, \theta = \phi = \pi/2)$ e curva azul $V_-^s(\Omega, \theta = \phi = \pi/2)$ . Frequência de análise $\Omega = 2\pi \times (2 \text{ MHz})$ . . . . .  | 117 |
| 5.7 | (esquerda) Coeficiente de correlação de amplitude $\mathcal{C}_{\theta=\phi=0}^s(\Omega)$ ; (direita) Coeficiente de correlação de fase $\mathcal{C}_{\theta=\phi=\pi/2}^s(\Omega)$ . Frequência de análise $\Omega = 2\pi \times (2 \text{ MHz})$ . . . . .   | 118 |
| 6.1 | Parte imaginária (absorção), no estado estacionário, das envolventes atômicas lentamente variáveis $\langle \mathcal{P}_1(t) \rangle_{ee}$ e $\langle \mathcal{P}_2(t) \rangle_{ee}$ . Taxas de Rabi $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 2 \times \Gamma$ . . . . .  | 136 |
| 6.2 | Espectro de ruído de intensidade e de fase dos campos detetados. Campo de bombeio: (a) $S_{P11}(\Omega)$ (intensidade) e (c) $S_{Q11}(\Omega)$ (Fase). Campo sonda: (b) $S_{P22}(\Omega)$ (intensidade) e (d) $S_{Q22}(\Omega)$ (Fase). frequência de análise $\Omega = 2\pi \times (2 \text{ MHz})$ . . . . .   | 137 |
| 6.3 | Curva (a): Coeficiente de correlação do ruído de intensidade $\mathcal{C}_{P12}(\Omega)$ e Curva (b): Coeficiente de correlação de fase $\mathcal{C}_{Q12}(\Omega)$ , entre os campos de bombeio e sonda detetados. . . . .  | 138 |
| 6.4 | Esquerda: Coeficiente de correlação de intensidade $\mathcal{C}_{P12}(\Omega)$ e Direita: Coeficiente de correlação de fase $\mathcal{C}_{Q12}(\Omega)$ , em função da frequência de análise $\Omega$ , para diferentes valores das frequências de Rabi, com $\Delta_{L1} = \Delta_{L2} = 0$ . . . . .   | 139 |
| 6.5 | Esquerda: Coeficiente de correlação de intensidade $\mathcal{C}_{P12}(\Omega)$ e Direita: Coeficiente de correlação de fase $\mathcal{C}_{Q12}(\Omega)$ , em função da frequência de análise $\Omega$ , para diferentes valores das frequência de Rabi, com $\Delta_{L1} = \Delta_{L2} = \Gamma$ . . . . .   | 141 |
| 6.6 | Sinais de ruído da soma $S_{P+}(\Omega)$ (curva preta) e do ruído da diferença $S_{P-}(\Omega)$ (curva vermelha) de intensidade dos campos de bombeio e sonda em função da dessintonia do campo sonda $\Delta_{L2}$ . (a) $\Omega = 2 \text{ MHz}$ ; (b) $\Omega = 4 \text{ MHz}$ ; (c) $\Omega = 10 \text{ MHz}$ e (d) $\Omega = 15 \text{ MHz}$ . . . . .  | 142 |
| 6.7 | Sinais de ruído da soma $S_{P+}(\Omega)$ (curva preta) e da diferença $S_{P-}(\Omega)$ (curva vermelha) de intensidade dos campos de bombeio e sonda em função da dessintonia do campo sonda $\Delta_{L2}$ . (a) $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 2 \times \Gamma$ ; (b) $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 4 \times \Gamma$ ; (c) $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 6 \times \Gamma$ e (d) $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 8 \times \Gamma$ . . . . . | 143 |
| 6.8 | Sinais de ruído da soma $S_{Q+}(\Omega)$ (curva preta) e da diferença $S_{Q-}(\Omega)$ (curva vermelha) de fase dos campos de bombeio e sonda em função da dessintonia do campo sonda $\Delta_{L2}$ . (a) $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 2 \times \Gamma$ ; (b) $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 4 \times \Gamma$ ; (c) $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 6 \times \Gamma$ e (d) $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 8 \times \Gamma$ . . . . .        | 144 |

6.9 Sinais de ruído da soma  $S_{Q+}(\Omega)$  (curva preta) e do ruído da diferença  $S_{Q-}(\Omega)$  (curva vermelha) de fase dos campos de bombeio e sonda em função da dessintonia do campo sonda  $\Delta_{L2}$ . (a)  $\Omega = 2 \text{ MHz}$ ; (b)  $\Omega = 4 \text{ MHz}$ ; (c)  $\Omega = 10 \text{ MHz}$  e (d)  $\Omega = 15 \text{ MHz}$ . . . . . 145

C.1 Cavidade em anel para o estudo da dinâmica dos campos intracavidade.  $M_1$ : espelho de acoplamento de coeficientes de reflexão e de transmissão  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{T}_1$ , respectivamente; M; espelhos de 100% de refletividade. . . . . 164

## Agradecimentos

Durante o desenvolvimento deste trabalho tive a ajuda incondicional e desinteressada de meus amigos e companheiros, com a qual tornou-se possível a finalização do meu programa de doutorado. Citar e agradecer a todos eles constituiria uma lista muito longa de ser editada. Assim, a todos os que de uma ou outra forma fizeram possível o sucesso deste trabalho, muito obrigado!

Gotaria de expressar meus mais profundos agradecimentos ao Prof. Dr. Paulo A. Nussenzveig (orientador), pela confiança depositada em mim e pelo constante apoio e orientação, sempre presente no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos Profs. Dr. Ricardo J. Horowicz e Dr. Mikiya Muramatsu por haver-me acolhido e brindado a oportunidade de trabalhar com eles nos primeiros anos da minha permanência neste país maravilhoso.

Em particular, gostaria de agradecer aos meus colegas de laboratório: Luciano S. da Cruz, Marcelo Martinelli, Carlos Garrido Alzar, Sebastião Simionatto, Silvia M. de Paula e Daniel Felinto e aos meus camaradas: Dr. Murray K. Olsen e Pablo Barberis Blostein.

Agradeço de maneira especial aos Professores João Carlos Alves Barata, Kaled Dechoum e Sebastião José Nascimento de Pádua e à Professora Maria Aparecida Gonçalves Martinez por aceitar o convite para participar da comissão examinadora deste trabalho de tese.

O desenvolvimento deste trabalho não teria sido possível sem o auxílio financeiro da FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo). Agradeço a bolsa de Doutorado, concedida durante o período.

À minha família...

e à Vera, minha amada esposa

## Resumo

Neste trabalho apresentamos resultados experimentais e teóricos do ruído de intensidade e de fase, e das correspondentes correlações, entre os campos de bombeio e sonda na transparência induzida eletromagneticamente.

Experimentalmente, nessa condição, medimos excesso de ruído de intensidade em ambos feixes e correlação e anti-correlação de ruído de intensidade, mostrando claramente que elas dependem tanto da intensidade dos feixes, quanto da frequência de análise em que as medidas são realizadas. Utilizando uma varredura local do feixe sonda, observamos estruturas no espectro de ruído dos campos na transparência induzida e, a partir do ruído da soma e da diferença das intensidades dos feixes, vimos que nessa região há zonas com correlação e anti-correlação de intensidade, intercaladas. Estas estruturas dependem, novamente, da intensidade dos feixes e da frequência de análise.

Ainda no campo experimental, com relação ao ruído de fase, medimos excesso de ruído nos nossos feixes e, pela primeira vez, medimos uma correlação desse ruído entre os feixes na condição de transparência induzida.

Teoricamente, aprofundamos análises realizadas com um modelo em que átomos e campos são tratados quanticamente e, dadas as limitações constatadas, desenvolvemos um novo modelo semi-clássico. As novas previsões obtidas com esse modelo, em que os campos possuem fases difusivas, mostram um bom acordo qualitativo com os resultados experimentais. O excesso de ruído de intensidade dos feixes, observado na transparência induzida, se deve ao excesso de ruído de fase dos lasers, que é transferido ressonantemente pelos átomos para o ruído de intensidade.

## Abstract

In this work we present experimental and theoretical results of intensity and phase noise, and of the correspondent correlations, between pump and probe fields in electromagnetically induced transparency.

Experimentally, in this condition, we measure intensity excess-noise in both beams as well as intensity correlations and anti-correlations, clearly showing that both are dependent on the fields' intensities and on the analysis frequency. We also observed structures in the noise spectra of the fields in the induced transparency and that, in a single spectrum, there are zones with correlation and anti-correlation of intensity, interchanged. These structures are dependent, again, on the fields' intensities and on the analysis frequency.

We also measured excess phase noise in our beams and, for the first time, we measured a phase noise correlation between the beams in the condition of induced transparency.

Theoretically, we further developed an analysis with a model in which the atoms and the fields are treated quantum-mechanically. Owing to limitations detected in the application of this model to our experimental situation, we developed a new semi-classical model, in which the fields present phase diffusion. The new predictions obtained show a good qualitative agreement with the experimental result features. The excess noise of intensity of the beams, in the electromagnetically induced transparency, is a result of the resonant transfer of the diode lasers' excess phase noise into intensity noise by interaction with the atoms.





# Capítulo 1

## Introdução

A magnitude da interação entre a luz e os átomos é uma função de sua frequência (comprimento de onda). Quando a frequência da luz iguala a frequência de uma transição atômica particular (condição de ressonância) a resposta ótica do meio é incrementada. A propagação da luz no meio é acompanhada de uma forte absorção e dispersão: uma constante excitação dos átomos aos seus estados excitados fluorescentes. Esta interação é a base da investigação espectroscópica de átomos e moléculas. Neste sentido, o uso de fontes de luz laser monocromáticas, intensas e sintonizáveis tem permitido uma elevada sensibilidade e precisão na determinação dos níveis atômicos ou moleculares das espécies sob investigação.

Embora por muito tempo a atenção dos espectroscopistas tenha sido dirigida a sistemas de dois níveis, a possibilidade de irradiar uma amostra com vários campos eletromagnéticos simultaneamente tem permitido a observação de transições de múltiplos fótons e outros fenômenos não-lineares, cujas aplicações têm sido exploradas na crescente área da espectroscopia não-linear [1]. Em comparação a um sistema de dois níveis, um sistema de três níveis, interagindo com dois campos eletromagnéticos monocromáticos, representa uma configuração na qual os fenômenos não-lineares são acentuados tanto no número de possíveis configurações de lasers, quanto na magnitude das não-linearidades.

Dentre os fenômenos não-lineares associados a um sistema atômico de três níveis interagindo com dois campos eletromagnéticos contínuos, o de aprisionamento coerente de população e o de transparência induzida eletromagneticamente, têm sido temas de vários estudos recentes [1]. Com base no fenômeno de aprisionamento coerente de população, há trabalhos em aplicações metrológicas (medidas da frequência de separação entre os estados hiperfinos dos estados fundamentais de átomos alcalinos), bi-estabilidade ótica, espectroscopia de alta resolução, mistura de quatro ondas e estruturas induzidas por laser [1].

Por outro lado, a transparência induzida eletromagneticamente tem sido utilizada com sucesso na desaceleração, armazenamento e liberação de pulsos de luz - como mostram as pesquisas recentes - o que torna o fenômeno um excelente candidato para o processamento de informação quântica e para o controle coerente da propagação de pulsos de luz. Uma revisão bibliográfica e alguns aspectos básicos do aprisionamento coerente de população e da transparência induzida por laser são apresentados no Cap.3.

Diferentemente da maioria das investigações sobre estes fenômenos, nosso trabalho tem como principal objetivo estudar as propriedades estatísticas dos campos eletromagnéticos após a interação com os átomos e na condição de transparência induzida eletromagneticamente. Em recentes trabalhos [2, 3], mostramos que na interação dos campos com os átomos, na condição de transparência induzida, o ruído de intensidade dos feixes responsáveis pelo fenômeno carrega abundante informação do processo coerente por trás da transparência induzida por laser. Além disso, mostramos que os dois lasers da transparência induzida, inicialmente independentes, evidenciam uma apreciável correlação de ruído de intensidade, como resultado da passagem pelo meio atômico na situação de ressonância.

No entanto, essa investigação esteve inicialmente limitada a uma única frequência de análise (do espectro de ruído) e a uns poucos valores de intensidade dos feixes. Além disso, só havia resultados experimentais para o ruído de intensidade dos feixes de bombeio e sonda. Neste sentido, o presente trabalho tem como objetivo, dentre outros, apresentar os novos resultados obtidos com o aprofundamento da análise experimental destes efeitos a partir do controle sistemático desses parâmetros. Além dessa maior sistematização das medidas, outros aprimoramentos foram feitos no experimento, entre os quais destacam-se o travamento em frequência dos lasers e a utilização de uma célula de vapor de rubídio auxiliar como referência permanente para o sinal DC da transparência induzida. Com estes aprimoramentos, além de reproduzir as medidas de excesso de ruído de intensidade de cada um dos feixes e da correlação de intensidade entre eles, na condição de transparência induzida, também observamos e medimos uma anti-correlação de intensidade dos feixes. Esta correlação e anti-correlação dependem fortemente da intensidade dos campos, bem como da frequência de análise em que as medidas são realizadas. Estes resultados são apresentados no Cap.4.

Infelizmente, o modelo teórico quântico - baseado nas equações quânticas de Langevin - onde os campos e os átomos interagem numa cavidade em anel e de grande finesse, apresentado nessas referências para a explicação qualitativa das medidas experimentais, não conseguiu dar conta dos novos resul-

tados. Claramente ele não permitia explicar a passagem de correlação para anti-correlação de intensidade entre os feixes quando a intensidade dos feixes é aumentada. Após uma longa discussão sobre as possíveis causas desse comportamento experimental, concluímos que a transferência ressonante de ruído de fase para ruído de amplitude devia ser um dos principais responsáveis pelo comportamento dos nossos sinais. Sendo assim, adicionamos à nossa montagem experimental duas cavidades de análise, uma para cada feixe, para estudar o ruído de fase dos lasers, antes e depois de interagir com os átomos. Deste modo, pela primeira vez, conseguimos medir o ruído de fase dos campos e as correlações entre eles na condição de transparência induzida. Estes resultados também são apresentados no Cap.4.

O fenômeno de transferência de ruído de modulação de fase (**PM**, do inglês *Phase Modulation*) para ruído de modulação de amplitude (**AM**, do inglês *Amplitude Modulation*) devido à passagem por um meio atômico tem sido amplamente estudado desde 1991, quando foi sugerida pela primeira vez a sua aplicação para espectroscopia de alta resolução [4]. A origem deste fenômeno é o excesso de ruído de fase que apresentam os lasers de diodo em condições experimentais usuais [5, 6], onde o ruído de amplitude é bem menor, podendo chegar a ficar abaixo do *shot noise* (laser sub-Poissoniano). Este excesso de ruído de fase insere ruído de amplitude na polarização induzida no meio atômico [4, 7]. Como o campo detectado na saída do meio é uma combinação do campo incidente e da polarização excitada, este passa a apresentar também excesso de ruído na quadratura amplitude. O excesso de ruído de amplitude pode então ser observado pela análise da corrente gerada em um fotodetector, que é um dispositivo sensível apenas à intensidade (proporcional à quadratura amplitude). A idéia de usar a conversão **AM** $\leftrightarrow$ **PM** em espectroscopia de alta resolução vem do fato de que as componentes espectrais do ruído que coincidem com alguma frequência de ressonância atômica (ou com a diferença entre duas frequências de ressonância) apresentam uma maior oscilação de amplitude. Desta forma, é possível obter informação sobre o espectro do meio pela análise do ruído da luz na saída da amostra em um Analisador de Espectros [4, 8, 9].

Por outro lado, após um cuidadoso estudo do modelo teórico das refs. [2, 3], percebemos algumas falhas na sua implementação que, uma vez corrigidas, mostraram previsões teóricas muito diferentes das anteriores. Este modelo e as suas previsões são apresentados no Cap.5. Com o objetivo de dispor de um modelo teórico mais próximo da experiência, desenvolvemos um modelo semi-clássico no qual, em contraste com o modelo quântico, os campos eletromagnéticos são considerados clássicos, com flutuações Markovianas nas suas fases, amplitudes constantes e com propagação livre. Este modelo oferece um melhor acordo qualitativo com a maioria dos resultados experimentais e o seu desenvolvimento, com as previsões correspondentes, é apresentado no Cap.6.

No entanto, ainda persistem algumas discrepâncias entre as previsões deste modelo e alguns resultados experimentais, de modo que são necessários novos testes, tanto experimentais, quanto teóricos (por exemplo, parece ser necessário incluir outros níveis atômicos no tratamento, além de considerar a distribuição em velocidades dos átomos).

As conclusões deste trabalho e alguns comentários finais são apresentados no Cap.7.

# Capítulo 2

## Descrições do campo eletromagnético

### 2.1 Introdução

Se a base deste trabalho é a transparência induzida eletromagneticamente, então os pilares do mesmo são, por um lado, os campos eletromagnéticos responsáveis pelo fenômeno e, por outro lado, os átomos onde o fenômeno se manifesta.

Neste trabalho apresentaremos o desenvolvimento de dois modelos teóricos para o estudo do ruído dos campos responsáveis pela transparência induzida num meio atômico: um modelo completamente quântico e um modelo semi-clássico - com os campos com flutuações de fase.

Neste ponto o leitor poderia perguntar: Por que a necessidade de dois modelos teóricos? Esta é uma pergunta válida e espero, sinceramente, que no decorrer deste trabalho ela seja respondida. Assim, assumindo que a necessidade de apresentarmos dois modelos ficará clara mais adiante, este capítulo tem como objetivo a descrição de um dos pilares do trabalho: os campos eletromagnéticos. Como toda descrição, clássica e quântica, do campo eletromagnético, a partir das equações de Maxwell derivamos algumas expressões gerais para o espectro de ruído de intensidade e de fase, bem como das correlações, de campos clássicos com flutuações Markovianas na sua fase após interação com uma amostra atômica. No caso dos campos quânticos, descrevemos um modelo de feixe de luz laser com flutuações em torno da sua frequência central e fazemos um estudo, considerando o estado de vácuo, dessas flutuações em função dos operadores de quadratura. Além disso, descrevemos brevemente algumas propriedades dos estados coerentes e comprimidos. Finalmente, apresentamos as técnicas de detecção homodina e a técnica que usa o feixe de saída de uma cavidade vazia, ambas usadas para medir o ruído das quadraturas do campo.

## 2.2 Campo eletromagnético clássico

As equações de Maxwell no vácuo, em ausência de cargas e correntes elétricas, são dadas pelas seguintes expressões:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (2.4)$$

onde  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  é o campo elétrico,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  o campo magnético e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. Tomando o rotacional da Eq.(2.3) e substituindo o lado direito da Eq.(2.4) na expressão obtida, encontramos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (2.5)$$

A equação anterior pode ser simplificada fazendo uso da identidade vetorial  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$  e usando a Eq.(2.2). Assim, encontramos a equação:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (2.6)$$

que descreve ondas eletromagnéticas se propagando no vácuo.

Em presença de cargas e correntes elétricas, num meio não magnético, as Eqs.(2.2) e (2.4) adotam a seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t), \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) + \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t), \quad (2.8)$$

onde  $\rho(\vec{r}, t)$  e  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  são, respectivamente, a densidade de carga e a densidade de corrente elétrica. Consequentemente, a equação de onda se re-escreve da seguinte forma:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

onde  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  é a polarização do meio induzida pelo campo elétrico.

Neste trabalho estaremos interessados na interação de campos de luz laser monocromáticos (ou quase-monocromáticos) com os átomos. Em particular, vamos considerar a propagação de uma onda plana linearmente polarizada propagando-se numa dada direção, por exemplo, na direção  $z$ . A componente de frequência positiva<sup>1</sup> desse campo elétrico pode ser descrita por:

$$\vec{E}^+(z, t) = \vec{e} \mathcal{E}_0(z, t) e^{i(kz - \omega t - \varphi(z, t))} , \quad (2.10)$$

onde  $\vec{e}$  é a direção de polarização,  $\mathcal{E}_0(z, t)$  a amplitude,  $\omega$  a frequência de oscilação do campo,  $k = \omega/c$  o número de onda e  $\varphi(z, t)$  a sua fase. Se o campo elétrico é realmente monocromático,  $\mathcal{E}_0(z, t)$  e  $\varphi(z, t)$  são constantes no espaço e no tempo. Geralmente, assume-se que o campo varia lentamente no espaço e no tempo [10, 11].

Usando  $\vec{E}^-(z, t) = [\vec{E}^+(z, t)]^*$  e fazendo a decomposição de Euler para as exponenciais, o campo elétrico total na direção  $z$  pode ser escrito como:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e} \left\{ \vec{E}_P(z, t) \cos(\omega t + \varphi) + \vec{E}_Q(z, t) \sin(\omega t + \varphi) \right\} , \quad (2.11)$$

onde  $\vec{E}_P(\vec{r}, t)$  e  $\vec{E}_Q(\vec{r}, t)$  são variáveis chamadas de quadratura amplitude e fase do campo, respectivamente, as quais permitem decompor o campo elétrico na base formada pelas funções ortogonais  $\cos[\omega t + \varphi(z, t)]$  e  $\sin[\omega t + \varphi(z, t)]$ , respectivamente.

## 2.3 Campo eletromagnético clássico com fase estocástica

No Cap.6 apresentaremos um modelo semi-clássico estocástico para a transparência induzida por laser. Nesse modelo, os campos (sonda e bombeio) são considerados clássicos, com flutuações Markovianas nas suas fases e com amplitudes constantes. Sendo assim, vamos ver nesta seção, as principais características da interação desses campos com os átomos.

Considerando apenas a dependência temporal dos campos, suficiente para o estudo do sistema no estado estacionário, as componentes de frequência positiva dos campos de bombeio  $\vec{E}_1^+(t)$  e do campo sonda  $\vec{E}_2^+(t)$ , com difusão de fase [7, 12], são descritas, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$\vec{E}_1^+(t) = \vec{e}_1 \mathcal{E}_1(t) e^{-i(\omega_1 t + \varphi_1(t))} , \quad (2.12)$$

$$\vec{E}_2^+(t) = \vec{e}_2 \mathcal{E}_2(t) e^{-i(\omega_2 t + \varphi_2(t))} , \quad (2.13)$$

---

<sup>1</sup>É costume em ótica quântica decompor o campo elétrico em componentes de frequência “positiva” e “negativa”.

onde  $\mathcal{E}_1(t)$  e  $\mathcal{E}_2(t)$  são as amplitudes dos respectivos campos,  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$  as suas respectivas fases estocásticas, que para este caso representam processos de Wiener (ver Apêndice B), com as seguintes propriedades:

$$\langle d\varphi_k \rangle = 0 , \quad (2.14)$$

$$\langle d\varphi_k^2 \rangle = 2b_k dt , \quad (2.15)$$

$$\langle d\varphi_k^n \rangle = 0 , \quad (2.16)$$

com  $k = 1, 2$ . Os termos  $b_1$  e  $b_2$  correspondem às larguras espectrais Lorentzianas dos campos  $\vec{E}_1(t)$  e  $\vec{E}_2(t)$ , respectivamente.

No processo de interação com átomos de um vapor, os campos elétricos induzem, respectivamente, as seguintes polarizações:

$$\vec{P}_1^+(t) = \vec{e}_1 \mathcal{P}_1(t) e^{-i(\omega_{L1}t + \varphi_1(t))} , \quad (2.17)$$

$$\vec{P}_2^+(t) = \vec{e}_2 \mathcal{P}_2(t) e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2(t))} , \quad (2.18)$$

As variáveis  $\mathcal{P}_1(t)$  e  $\mathcal{P}_2(t)$  são definidas, respectivamente, pelas seguintes expressões

$$\mathcal{P}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{01} W_1(\omega_{01}) \mathcal{P}_1(t, \omega_{01}) , \quad (2.19)$$

$$\mathcal{P}_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{02} W_2(\omega_{02}) \mathcal{P}_2(t, \omega_{01}) , \quad (2.20)$$

onde  $W_i(\omega_{0k})$ , com  $k = 1, 2$ , é um fator que dá a distribuição Doppler de átomos com frequências de transição  $\omega_{0k}$  na amostra atômica. As variáveis lentas  $\mathcal{P}_1(t, \omega_{01})$  e  $\mathcal{P}_2(t, \omega_{02})$  são definidas a partir dos operadores de dipolo atômico (ver Cap.6).

O campo elétrico total, após a interação dos feixes de luz laser com os átomos, é dado pela seguinte expressão:

$$\vec{E}_T(t) = \vec{E}_1(t) + \vec{E}_2(t) + i \frac{\beta}{2c\epsilon_0} \vec{P}(t) , \quad (2.21)$$

onde  $\beta$  é uma constante real que depende da densidade e do comprimento ótico da amostra atômica que interage com os campos.

Substituindo as expressões dadas pelas Eqs.(2.17 a 2.20) na Eq.(2.21) encontramos, para a componente de frequência positiva do campo total detectado:

$$\begin{aligned} \vec{E}_T^+(t) = & \vec{e}_1 \left[ \mathcal{E}_1(t) + i \frac{\beta}{2c\epsilon_0} \mathcal{P}_1(t) \right] e^{-i(\omega_{L1}t + \varphi_1(t))} + \\ & + \vec{e}_2 \left[ \mathcal{E}_2(t) + i \frac{\beta}{2c\epsilon_0} \mathcal{P}_2(t) \right] e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2(t))} . \end{aligned} \quad (2.22)$$



A intensidade total transmitida,  $I_q(t)$ , para um único feixe com polarização  $\vec{q}$  (onde  $\vec{q}$  pode ser  $\vec{e}_1$  ou  $\vec{e}_2$ , de modo tal que o índice  $q$  assume os valores 1 ou 2) é dada por:

$$\begin{aligned} I_q(t) &= 2c\varepsilon_0 \left| \vec{q} \cdot \vec{E}_T(t) \right|^2 \\ &= 2c\varepsilon_0 \left| \mathcal{E}_q(t) \right|^2 - i\beta \mathcal{E}_q(t) \mathcal{P}_q^*(t) + i\beta \mathcal{E}_q^*(t) \mathcal{P}_q(t) + \frac{\beta^2}{2c\varepsilon_0} \left| \mathcal{P}_q(t) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Definindo  $I_q^0 \equiv 2c\varepsilon_0 \left| \mathcal{E}_q(t) \right|^2$ , a intensidade do feixe de polarização  $q$  antes de interagir com os átomos e assumindo a amplitude do campo real e constante, i.e.,  $\mathcal{E}_q(t) = \mathcal{E}_q \in \mathbb{R}$ , podemos escrever a Eq.(2.23) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_q(t) &= I_q^0 - 2\beta \mathcal{E}_q \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{0q} W_q(\omega_{0q}) \Im m[\mathcal{P}_q(t, \omega_{0q})] + \\ &\quad + \frac{\beta^2}{2c\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{0q} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'_{0q} W_q(\omega_{0q}) W_q(\omega'_{0q}) \mathcal{P}_q(t, \omega_{0q}) \mathcal{P}_q^*(t, \omega'_{0q}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde usamos as definições dadas pelas Eqs.(2.19 - 2.20) e  $\Im m$  denota a parte imaginária.

A partir da Eq.(2.23) podemos ver que a correlação de intensidade entre dois campos de polarizações  $q$  e  $q'$  é dada por:

$$\begin{aligned} \langle I_q(\tau) I_{q'}(0) \rangle &= I_q^0 I_{q'}^0 - iI_q^0 \beta [\mathcal{E}_{q'} \langle \mathcal{P}_{q'}^*(0) \rangle - \mathcal{E}_{q'}^* \langle \mathcal{P}_{q'}(0) \rangle] - \\ &\quad - iI_{q'}^0 \beta [\mathcal{E}_q \langle \mathcal{P}_q^*(\tau) \rangle - \mathcal{E}_q^* \langle \mathcal{P}_q(\tau) \rangle] + \\ &\quad + \frac{\beta^2}{2c\varepsilon_0} \left[ I_q^0 \langle \mathcal{P}_{q'}(0) \mathcal{P}_{q'}^*(0) \rangle + I_{q'}^0 \langle \mathcal{P}_q(\tau) \mathcal{P}_q^*(\tau) \rangle \right] - \\ &\quad - \beta^2 \left[ \mathcal{E}_q \mathcal{E}_{q'} \langle \mathcal{P}_q^*(\tau) \mathcal{P}_{q'}^*(0) \rangle + \mathcal{E}_q^* \mathcal{E}_{q'}^* \langle \mathcal{P}_q(\tau) \mathcal{P}_{q'}(0) \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}_q \mathcal{E}_{q'}^* \langle \mathcal{P}_q^*(\tau) \mathcal{P}_{q'}(0) \rangle - \mathcal{E}_q^* \mathcal{E}_{q'} \langle \mathcal{P}_q(\tau) \mathcal{P}_{q'}^*(0) \rangle \right] + \\ &\quad + O(\beta^3). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Notando que  $\langle \mathcal{P}(\tau) \rangle = \langle \mathcal{P}(0) \rangle$  e, portanto,  $\langle \mathcal{P}(\tau) \mathcal{P}(\tau) \rangle = \langle \mathcal{P}(0) \mathcal{P}(0) \rangle$  e considerando  $\beta$  pequeno, podemos re-escrever a Eq.(2.25) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle I_q(\tau) I_{q'}(0) \rangle &= A_{qq'} - \beta^2 \left[ \mathcal{E}_q \mathcal{E}_{q'} \langle \mathcal{P}_q^*(\tau) \mathcal{P}_{q'}^*(0) \rangle + \mathcal{E}_q^* \mathcal{E}_{q'}^* \langle \mathcal{P}_q(\tau) \mathcal{P}_{q'}(0) \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{E}_q \mathcal{E}_{q'}^* \langle \mathcal{P}_q^*(\tau) \mathcal{P}_{q'}(0) \rangle - \mathcal{E}_q^* \mathcal{E}_{q'} \langle \mathcal{P}_q(\tau) \mathcal{P}_{q'}^*(0) \rangle \right], \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde  $A_{qq'}$  contém todos os termos que não dependem do tempo e ignoramos os termos de terceira ordem em  $\beta$ .

Ignorando os termos que não dependem do tempo, o espectro de intensidade (fora da origem das frequências) é então dado pela seguinte expressão (ver Apêndice A):

$$S_{P_{qq'}}(\Omega) = -\beta^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\Omega\tau} \left[ \mathcal{E}_q \mathcal{E}_{q'} \langle \mathcal{P}_q^*(\tau) \mathcal{P}_{q'}^*(0) \rangle + \mathcal{E}_q^* \mathcal{E}_{q'}^* \langle \mathcal{P}_q(\tau) \mathcal{P}_{q'}(0) \rangle - \mathcal{E}_q \mathcal{E}_{q'}^* \langle \mathcal{P}_q^*(\tau) \mathcal{P}_{q'}(0) \rangle - \mathcal{E}_q^* \mathcal{E}_{q'} \langle \mathcal{P}_q(\tau) \mathcal{P}_{q'}^*(0) \rangle \right] \right\}. \quad (2.27)$$

Considerando  $\mathcal{E}_q, \mathcal{E}_{q'} \in \mathbb{R}$  e fazendo uso das definições dadas pelas Eqs.(2.19 - 2.20), a Eq.(2.27) pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{P_{qq'}}(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\Omega\tau} \left[ \langle I_q(\tau) I_{q'}(0) \rangle - \langle I_q(\tau) \rangle \langle I_{q'}(0) \rangle \right] \\ S_{P_{qq'}}(\Omega) &= \beta^2 \mathcal{E}_q \mathcal{E}_{q'} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{0q} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'_{0q'} W_q(\omega_{0q}) W_{q'}(\omega'_{0q'}) \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\Omega\tau} \times \right. \\ &\quad \times \left[ - \langle \mathcal{P}_q^*(\tau, \omega_{0q}) \mathcal{P}_{q'}^*(0, \omega'_{0q'}) \rangle - \langle \mathcal{P}_q(\tau, \omega_{0q}) \mathcal{P}_{q'}(0, \omega'_{0q'}) \rangle + \right. \\ &\quad \left. \left. + \langle \mathcal{P}_q^*(\tau, \omega_{0q}) \mathcal{P}_{q'}(0, \omega'_{0q'}) \rangle + \langle \mathcal{P}_q(\tau, \omega_{0q}) \mathcal{P}_{q'}^*(0, \omega'_{0q'}) \rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

No que se refere ao modelo do Cap.6, estaremos interessados nas seguintes quantidades:

- $S_{P_{11}}(\Omega)$ , que corresponde ao espectro de ruído de intensidade do campo 1;
- $S_{P_{22}}(\Omega)$ , que corresponde ao espectro de ruído de intensidade do campo 2;
- $S_{P_+}(\Omega) = S_{P_{11}}(\Omega) + S_{P_{22}}(\Omega) + S_{P_{12}}(\Omega) + S_{P_{21}}(\Omega)$ , que corresponde ao espectro de ruído da soma das intensidades dos campos 1 e 2 e;
- $S_{P_-}(\Omega) = S_{P_{11}}(\Omega) + S_{P_{22}}(\Omega) - S_{P_{12}}(\Omega) - S_{P_{21}}(\Omega)$ , que corresponde ao espectro de ruído da diferença das intensidades dos campos 1 e 2.

A Eq.(2.28) permite calcular o espectro de potência (ou intensidade, proporcional à quadratura amplitude  $\vec{E}_P(z, t)$ , Eq.(2.11), dos campos de bombeio e sonda, separadamente, bem como as correlações entre eles.

Vamos agora desenvolver as relações que nos permitem calcular expressões equivalentes para a quadratura fase  $\vec{E}_Q(z, t)$  dos campos e das correlações entre elas. Para ver isto vejamos que o campo total, após a interação com os átomos, é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \vec{E}_T(t) = \vec{e}_1 \left\{ \left[ \mathcal{E}_1(t) + i \frac{\beta}{2c\epsilon_0} \mathcal{P}_1(t) \right] e^{-i\Phi_1(t)} + \left[ \mathcal{E}_1^*(t) - i \frac{\beta}{2c\epsilon_0} \mathcal{P}_1^*(t) \right] e^{i\Phi_1(t)} \right\} + \\ + \vec{e}_2 \left\{ \left[ \mathcal{E}_2(t) + i \frac{\beta}{2c\epsilon_0} \mathcal{P}_2(t) \right] e^{-i\Phi_2(t)} + \left[ \mathcal{E}_2^*(t) - i \frac{\beta}{2c\epsilon_0} \mathcal{P}_2^*(t) \right] e^{i\Phi_2(t)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde escrevemos  $\Phi_1(t) = \omega_{L1}t + \varphi_1(t)$  e  $\Phi_2(t) = \omega_{L2}t + \varphi_2(t)$  para as fases totais dos campos, respectivamente.

Fazendo uso da notação de Euler, temos:

$$\begin{aligned} \vec{E}_T(t) = \vec{e}_1 \left\{ \left[ \mathcal{E}_1^*(t) + \mathcal{E}_1(t) - i \frac{\beta}{2c\epsilon_0} [\mathcal{P}_1^*(t) - \mathcal{P}_1(t)] \right] \cos(\Phi_1(t)) + \right. \\ \left. + i \left[ \mathcal{E}_1^*(t) - \mathcal{E}_1(t) - i \frac{\beta}{2c\epsilon_0} [\mathcal{P}_1^*(t) + \mathcal{P}_1(t)] \right] \sin(\Phi_1(t)) \right\} + \\ + \vec{e}_2 \left\{ \left[ \mathcal{E}_2^*(t) + \mathcal{E}_2(t) - i \frac{\beta}{2c\epsilon_0} [\mathcal{P}_2^*(t) - \mathcal{P}_2(t)] \right] \cos(\Phi_2(t)) + \right. \\ \left. + i \left[ \mathcal{E}_2^*(t) - \mathcal{E}_2(t) - i \frac{\beta}{2c\epsilon_0} [\mathcal{P}_2^*(t) + \mathcal{P}_2(t)] \right] \sin(\Phi_2(t)) \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Do anterior, vemos que um único campo com polarização  $q$ , após interação com os átomos, pode ser escrito como:

$$\vec{E}_q(t) = \hat{e}_q \left\{ \vec{E}_{Pq}(t) \cos(\Phi_1(t)) + i \vec{E}_{Qq}(t) \sin(\Phi_1(t)) \right\}, \quad (2.31)$$

onde  $\vec{E}_{Pq}(t)$  e  $\vec{E}_{Qq}(t)$  são, novamente, as quadraturas amplitude e fase do campo detectado dadas, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$\vec{E}_{Pq}(t) = \mathcal{E}_q^*(t) + \mathcal{E}_q(t) - \frac{\beta}{c\epsilon_0} \Im m[\mathcal{P}_q(t)], \quad (2.32)$$

$$\vec{E}_{Qq}(t) = \mathcal{E}_q^*(t) - \mathcal{E}_q(t) - i \frac{\beta}{c\epsilon_0} \Re e[\mathcal{P}_q(t)], \quad (2.33)$$

onde  $\Re e$  denota a parte real.

Da Eq.(2.33) calculamos a correlação entre as quadraturas fase de dois campos com polarizações  $q$  e  $q'$ , com amplitudes constantes e reais após interagir com os átomos. Notando, novamente, que  $\langle \mathcal{P}(\tau) \rangle = \langle \mathcal{P}(0) \rangle$  e  $\langle \mathcal{P}(\tau) \mathcal{P}(\tau) \rangle = \langle \mathcal{P}(0) \mathcal{P}(0) \rangle$  e ignorando os termos que não dependem do tempo, o espectro de ruído da quadratura fase (fora da origem das frequências) é então dado pela seguinte expressão:

$$S_{Q_{qq'}}(\Omega) = -\frac{\beta^2}{4c^2\varepsilon_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{0q} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'_{0q'} W_q(\omega_{0q}) W_{q'}(\omega'_{0q'}) \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\Omega\tau} \times \right. \\ \times \left[ \langle \mathcal{P}_q^*(\tau, \omega_{0q}) \mathcal{P}_{q'}^*(0, \omega'_{0q'}) \rangle + \langle \mathcal{P}_q(\tau, \omega_q) \mathcal{P}_{q'}(0, \omega'_{0q'}) \rangle + \right. \\ \left. \left. + \langle \mathcal{P}_q^*(\tau, \omega_{0q}) \mathcal{P}_{q'}(0, \omega'_{0q'}) \rangle + \langle \mathcal{P}_q(\tau, \omega_{0q}) \mathcal{P}_{q'}^*(0, \omega'_{0q'}) \rangle \right] \right\}. \quad (2.34)$$

Tal como no caso do ruído de intensidade, no que se refere ao modelo do Cap.6, estaremos interessados nas seguintes quantidades:

- $S_{Q_{11}}(\Omega)$ , que corresponde ao espectro de ruído da quadratura fase do campo 1;
- $S_{Q_{22}}(\Omega)$ , que corresponde ao espectro de ruído de quadratura fase do campo 2;
- $S_{Q_+}(\Omega) = S_{Q_{11}}(\Omega) + S_{Q_{22}}(\Omega) + S_{Q_{12}}(\Omega) + S_{Q_{21}}(\Omega)$ , que corresponde ao espectro de ruído da soma das fases dos campos 1 e 2 e;
- $S_{Q_-}(\Omega) = S_{Q_{11}}(\Omega) + S_{Q_{22}}(\Omega) - S_{Q_{12}}(\Omega) - S_{Q_{21}}(\Omega)$ , que corresponde ao espectro de ruído da diferença das fases dos campos 1 e 2.

## 2.4 Campo eletromagnético quântico

Tal como no caso da teoria clássica, o ponto de partida para a quantização do campo eletromagnético são as equações de Maxwell da eletrodinâmica clássica [13, 14]. Para efeitos de quantização, essas equações são organizadas de modo tal que as variáveis do campo sejam adequadas para conversão quântica em termos de osciladores harmônicos. A quantização simplifica-se quando essas equações são escritas em termos dos potenciais  $U(\vec{r}, t)$  (escalar) e  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  (vetor). Esses potenciais são definidos de modo tal que:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (2.35)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t). \quad (2.36)$$

O gauge de Coulomb, onde os potenciais satisfazem a condição:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.37)$$

é conveniente para a quantização do campo eletromagnético.

No espaço livre, onde  $\vec{J}(\vec{r}, t) = 0$ , o potencial vetor satisfaz a equação de propagação de uma onda transversal, com velocidade  $c$  através do vácuo:

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (2.38)$$

Considerando uma região cúbica do espaço, de volume  $V = L^3$ , que contém ondas viajantes sob condições de fronteira periódicas, o potencial vetor é expandido em série de Fourier:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \left\{ \vec{A}_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{A}_k^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right\}, \quad (2.39)$$

onde as componentes de  $\vec{k}$  assumem os valores:

$$k_x = 2\pi \frac{\nu_x}{L}, \quad k_y = 2\pi \frac{\nu_y}{L}, \quad k_z = 2\pi \frac{\nu_z}{L}, \quad (2.40)$$

com  $\nu_x, \nu_y, \nu_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

A condição do gauge de Coulomb é satisfeita se:

$$\vec{k} \cdot \vec{A}_k(t) = \vec{k} \cdot \vec{A}_k^*(t) = 0. \quad (2.41)$$

As componentes de Fourier são independentes e cada uma delas satisfaz a equação de onda, o que significa que também satisfazem a equação de um oscilador harmônico simples:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}_k(t) + \omega_k^2 \vec{A}_k(t) = 0, \quad (2.42)$$

onde  $\omega_k = c|\vec{k}|$ .

A Eq.(2.42) tem a solução:

$$\vec{A}_k(t) = \vec{A}_k e^{-i\omega_k t}. \quad (2.43)$$

As variáveis dos modos podem ser agora substituídas pelas coordenadas generalizadas de “posição” e “momento”  $Q_k$  e  $P_k$ , respectivamente, de acordo com a seguinte transformação:

$$\vec{A}_k = \vec{e}_k \sqrt{4\varepsilon_0 V \omega_k^2} (\omega_k Q_k + iP_k), \quad (2.44)$$

onde  $\vec{e}_k$  é o vetor de polarização. A energia média de um único modo num ciclo, pode ser escrita como:

$$E_k = \frac{1}{2} (P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2), \quad (2.45)$$

O oscilador harmônico é quantizado via conversão de  $Q_k$  e  $P_k$  nos operadores  $\hat{q}_k$  e  $\hat{p}_k$ , respectivamente. Para um oscilador harmônico unidimensional, de massa unitária, obtemos o seguinte Hamiltoniano quântico:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2), \quad (2.46)$$

com os operadores  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  satisfazendo a relação de comutação:

$$[\hat{p}, \hat{q}] = i\hbar. \quad (2.47)$$

Agora definem-se os operadores de criação e de aniquilação para o oscilador harmônico:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (2.48)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (2.49)$$

com a relação de comutação:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (2.50)$$

que nos permite re-escrever o Hamiltoniano da Eq.(2.46), como:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.51)$$

Os operadores de aniquilação  $\hat{a}$  e de criação  $\hat{a}^\dagger$  aniquilam e criam um único quantum de energia  $\hbar\omega$  do oscilador harmônico, respectivamente. O número

de quanta de excitação acima do estado fundamental é dado pelo operador número,  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ , algumas vezes escrito como  $\hat{n}$ .

A quantização do campo eletromagnético é feita associando o oscilador mecânico com cada um dos modos do campo. Os operadores dos modos do campo  $\hat{a}_k^\dagger$  e  $\hat{a}_k$ , agora, criam e aniquilam um único quantum de energia  $\hbar\omega_k$  no modo da cavidade com vetor de onda  $\vec{k}$ . Esses quanta de energia são os fótons de cada um dos modos. Os operadores dos modos obedecem à relação de comutação dos bósons:

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, \quad (2.52)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (2.53)$$

Os coeficientes de Fourier clássicos [Eq.(2.44)] são substituídos por expressões de operadores:

$$\widehat{\vec{A}}_k = \vec{e}_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_k, \quad (2.54)$$

$$\widehat{\vec{A}}_k^\dagger = \vec{e}_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_k^\dagger, \quad (2.55)$$

que juntos dão as expressões quânticas para o potencial vetor. Depois de algumas manipulações encontramos as seguintes expressões para os operadores dos modos dos campos elétricos e magnéticos, respectivamente:

$$\widehat{\vec{E}}_k(\vec{r}, t) = i\vec{e}_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \left\{ \hat{a}_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega_k t)} \right\}, \quad (2.56)$$

$$\widehat{\vec{B}}_k(\vec{r}, t) = i\vec{k} \times \vec{e}_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_k}} \left\{ \hat{a}_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega_k t)} \right\}. \quad (2.57)$$

Os campos elétricos e magnéticos totais encontram-se somando sobre todos os modos de oscilação  $k$ . O Hamiltoniano de radiação para o campo total na cavidade se escreve como:

$$\mathcal{H}_T = \sum_k \hbar\omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right), \quad (2.58)$$

o que corresponde à soma do número de fótons em cada modo vezes sua energia, mais a energia do ponto zero,  $\hbar\omega_k/2$ , para cada modo do campo.

Tal como fizemos na seção anterior, considerando apenas a dependência temporal, o operador que descreve um modo do campo elétrico propagando-se numa direção com polarização  $\vec{e}$  e vetor de onda  $\vec{k}$ , pode ser descrito como:

$$\widehat{\vec{E}}_\omega(t) = i\vec{e} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \left( \hat{a}_\omega e^{-i\omega t} - \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\omega t} \right), \quad (2.59)$$

onde substituímos o índice discreto  $k$  pelo índice contínuo  $\omega$ . As relações de comutação das Eqs.(2.52)-(2.53), se transformam em:

$$[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}] = [\hat{a}_\omega^\dagger, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = 0, \quad (2.60)$$

$$[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = 2\pi\delta(\omega - \omega'). \quad (2.61)$$

Uma descrição realista do campo elétrico emitido por um laser deve considerar o caráter Gaussiano da sua estrutura espacial transversa bem como o caráter não monocromático do mesmo. O tratamento que apresentamos nesta seção simplifica-se quando consideramos um feixe de luz de extensão transversa de área  $\mathcal{A}$  constante, onde as variações da amplitude no plano transversa ao eixo de propagação do feixe são desprezadas [15].

Do ponto de vista temporal o campo elétrico associado a um feixe de luz laser visto pelos átomos é uma superposição do valor médio do campo à frequência central, digamos  $\omega_L$ , e das suas flutuações numa banda de frequência contínua, em torno dessa frequência central, de largura  $\Delta\omega$ , onde é satisfeita a condição  $\Delta\omega \ll \omega_L$ .

No que se segue deste trabalho, vamos escrever a transformada de Fourier  $F(\omega)$  de uma função  $f(t)$ , da seguinte forma:

$$F(\omega) = \int e^{i\omega t} f(t) dt, \quad (2.62)$$

e a sua transformada inversa:

$$f(t) = \int \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} F(\omega) d\omega. \quad (2.63)$$

Sendo desse modo, da Eq.(2.59), vemos que o campo elétrico é dado pela seguinte expressão:

$$\widehat{\vec{E}}(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Delta\omega} \mathcal{E}_{0L}(\omega) \vec{e} \left\{ \hat{a}_\omega e^{-i\omega t} - \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\omega t} \right\} d\omega. \quad (2.64)$$

Se consideramos que  $\mathcal{E}_{0L}(\omega) = \sqrt{\hbar\omega/(2\epsilon_0 V)}$  varia lentamente no intervalo de frequência  $\Delta\omega$ , podemos escrever, sem perda de generalização  $\mathcal{E}_{0L}(\omega) \approx \mathcal{E}_{0L}(\omega_L) = \mathcal{E}_{0L}$ , para  $\omega$  no intervalo  $[\omega_L - \Delta\omega/2, \omega_L + \Delta\omega/2]$ .

Fazendo uso da aproximação anterior e multiplicando pelo fator  $e^{-i\omega_L t}$  a primeira integral da Eq.(2.64) e pelo fator  $e^{i\omega_L t}$  a segunda integral da mesma equação, vemos que o operador de campo elétrico pode ser escrito como:

$$\widehat{\vec{E}}(t) = i\mathcal{E}_{0L} \vec{e} \left\{ e^{-i\omega_L t} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\omega} e^{-i(\omega-\omega_L)t} \hat{a}_\omega d\omega \right] - e^{i\omega_L t} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\omega} e^{i(\omega-\omega_L)t} \hat{a}_\omega^\dagger d\omega \right] \right\}. \quad (2.65)$$



Fazendo  $\Omega = \omega - \omega_L$ , a Eq.(2.65) se escreve:

$$\begin{aligned} \widehat{\vec{E}}(t) = i\mathcal{E}_{0L}\vec{e} \left\{ e^{-i\omega_L t} \left[ \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\Omega t} \hat{a}_{\Omega+\omega_L} d\Omega \right] - \right. \\ \left. - e^{i\omega_L t} \left[ \frac{1}{2\pi} \int e^{i\Omega t} \hat{a}_{\Omega+\omega_L}^\dagger d\Omega \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

com  $\Omega \ll \omega_L$ . Como as frequências  $\omega$  e  $\omega_L$  pertencem ao domínio ótico, o valor de  $\Omega$  se encontra no domínio das rádio-frequências ( $\Omega \ll \omega, \omega_L$ ). Dado que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\Omega t} \hat{a}_{\Omega+\omega_L}^\dagger d\Omega &= \{\Omega \rightarrow -\Omega\} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-i\Omega t} \hat{a}_{-\Omega+\omega_L}^\dagger d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega t} \hat{a}_{-\Omega+\omega_L}^\dagger d\Omega \end{aligned} \quad (2.67)$$

a Eq.(2.66) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \widehat{\vec{E}}(t) = \mathcal{E}_{0L}\vec{e} \left\{ e^{-i\omega_L t} \left[ \frac{1}{2\pi} \int d\Omega e^{-i\Omega t} (i\hat{a}_{\Omega+\omega_L}) \right] + \right. \\ \left. + e^{i\omega_L t} \left[ \frac{1}{2\pi} \int d\Omega e^{-i\Omega t} (-i\hat{a}_{-\Omega+\omega_L}^\dagger) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Definindo as seguintes envolventes lentamente variáveis para o operador de amplitude do campo:

$$\widehat{A}(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\Omega t} \widehat{A}(\Omega) d\Omega, \quad (2.69)$$

$$\widehat{A}^\dagger(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\Omega t} \widehat{A}^\dagger(\Omega) d\Omega, \quad (2.70)$$

com:

$$\widehat{A}(\Omega) \equiv i\hat{a}_{\omega_L+\Omega} \quad ; \quad \widehat{A}^\dagger(\Omega) \equiv -i\hat{a}_{\omega_L-\Omega}^\dagger, \quad (2.71)$$

onde:

$$\left( \widehat{A}(\Omega) \right)^\dagger = \widehat{A}^\dagger(-\Omega), \quad (2.72)$$

a equação que representa o operador de campo elétrico pode ser escrita, finalmente, da seguinte forma:

$$\widehat{E}(t) = \mathcal{E}_{0L} \vec{e} \left\{ e^{-i\omega_L t} \widehat{A}(t) + e^{i\omega_L t} \widehat{A}^\dagger(t) \right\}. \quad (2.73)$$

Em termos dos operadores  $\widehat{A}(t)$  e  $\widehat{A}^\dagger(t)$ , para um estado arbitrário do campo  $|\Psi\rangle$ , a grandeza  $\langle \Psi | \widehat{A}^\dagger(t) \widehat{A}(t) | \Psi \rangle$  determina o número médio de fótons no volume  $V = \mathcal{A} c \tau$ , com  $\tau$  o comprimento temporal do feixe e  $\mathcal{A}$  a seção transversal do feixe.

### 2.4.1 Relações de comutação

Vamos derivar, agora, a relação de comutação dos operadores definidos pela Eq.(2.69) e Eq.(2.70). Para o caso de dois tempos, o comutador será dado por:

$$\begin{aligned} [\widehat{A}(t), \widehat{A}^\dagger(t')] &= \left[ \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega t} \widehat{A}(\Omega), \int \frac{d\Omega'}{2\pi} e^{-i\Omega' t'} \widehat{A}^\dagger(\Omega') \right] \\ &= \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d\Omega'}{2\pi} e^{-i(\Omega t + \Omega' t')} [i\hat{a}_{\omega_L + \Omega}, i\hat{a}_{\omega_L - \Omega'}^\dagger], \end{aligned} \quad (2.74)$$

que, usando o comutador dado pela Eq.(2.61), se transforma em:

$$[\widehat{A}(t), \widehat{A}^\dagger(t')] = \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega(t-t')} = \delta(t - t'). \quad (2.75)$$

### 2.4.2 Operadores de quadratura

Vamos estudar, nesta seção, algumas das propriedades do modo do campo elétrico caracterizado pela Eq.(2.73). Neste estudo usaremos a relação de comutação entre os operadores  $\widehat{A}(t)$  e  $\widehat{A}^\dagger(t)$  obtida na seção anterior. Para começar, vamos reescrever a Eq.(2.73) usando a decomposição de Euler para as funções exponenciais:

$$\widehat{E}(t) = \mathcal{E}_{0L} \left\{ \left( \widehat{A}(t) + \widehat{A}^\dagger(t) \right) \cos(\omega_L t) + i \left( \widehat{A}^\dagger(t) - \widehat{A}(t) \right) \sin(\omega_L t) \right\}. \quad (2.76)$$

Definindo o seguinte operador de quadratura generalizado:

$$\widehat{Y}_\theta(t) \equiv \widehat{A}(t) e^{-i\theta} + \widehat{A}^\dagger(t) e^{i\theta}, \quad (2.77)$$

a Eq.(2.76), se transforma em:

$$\widehat{E}(t) = \mathcal{E}_{0L} \left\{ \widehat{Y}_0(t) \cos(\omega_L t) + \widehat{Y}_{\pi/2}(t) \sin(\omega_L t) \right\} , \quad (2.78)$$

com:

$$\widehat{Y}_0(t) = \widehat{A}^\dagger(t) + \widehat{A}(t) \quad (2.79)$$

$$\widehat{Y}_{\pi/2}(t) = i(\widehat{A}^\dagger(t) - \widehat{A}(t)) . \quad (2.80)$$

Os operadores  $\widehat{Y}_0(t)$  e  $\widehat{Y}_{\pi/2}(t)$  são denominados *operador de quadratura amplitude* e *operador de quadratura fase* do campo elétrico quantizado, respectivamente.

### Relação de comutação

A partir das definições dadas pelas Eqs.(2.79) e da relação de comutação dada pela Eq.(2.75), vemos que os operadores de quadratura satisfazem a seguinte relação de comutação:

$$[\widehat{Y}_0(t), \widehat{Y}_{\pi/2}(t)] \equiv 2i . \quad (2.81)$$

Das definições e do comutador entre eles, vemos que os operadores de quadratura são operadores Hermitianos que representam duas grandezas físicas canonicamente conjugadas. Dado que o comutador entre eles é distinto de zero, temos que ambas não podem ser medidas simultaneamente com precisão absoluta.

### Relação de incerteza

Da mecânica quântica sabemos que o produto das dispersões de dois operadores Hermitianos, por exemplo,  $\widehat{P}$  e  $\widehat{Q}$ , num dado estado quântico [16, 17] é dada pela seguinte relação:

$$\Delta P \Delta Q \geq \frac{1}{2} |\langle [\widehat{P}, \widehat{Q}] \rangle| , \quad (2.82)$$

onde a dispersão  $\Delta P$  de uma grandeza física  $P$ , associada ao operador  $\widehat{P}$ , é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta P &\equiv \sqrt{\langle (\widehat{P} - \langle \widehat{P} \rangle)^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\langle \widehat{P}^2 \rangle - \langle \widehat{P} \rangle^2} . \end{aligned} \quad (2.83)$$

Aplicando essa definição aos operadores de quadratura do campo elétrico, encontramos a seguinte desigualdade ou relação de incerteza de Heisenberg:

$$\Delta Y_0 \Delta Y_{\pi/2} \geq 1 , \quad (2.84)$$

### 2.4.3 Flutuações quânticas

Dada a não comutatividade entre os operadores de quadratura, existem flutuações de origem quântica nas quadraturas do campo no estado de vácuo  $|0\rangle$ . Nesse caso, para o operador de quadratura amplitude temos:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \widehat{Y}_0^2 | 0 \rangle &= \langle 0 | \widehat{A}^2 + \widehat{A}^{\dagger 2} + 2\widehat{A}^\dagger \widehat{A} + 1 | 0 \rangle = 1 \\ \langle 0 | \widehat{Y}_0 | 0 \rangle &= \langle 0 | \widehat{A} + \widehat{A}^\dagger | 0 \rangle = 0 , \end{aligned} \quad (2.85)$$

de onde vemos que a sua variância é dada por:

$$\langle 0 | (\Delta Y_0)^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \widehat{Y}_0^2 | 0 \rangle - \langle 0 | \widehat{Y}_0 | 0 \rangle^2 = 1 . \quad (2.86)$$

Fazendo a mesma análise para o operador de quadratura fase, encontramos:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \widehat{Y}_{\pi/2}^2 | 0 \rangle &= -\langle 0 | \widehat{A}^2 + \widehat{A}^{\dagger 2} - 2\widehat{A}^\dagger \widehat{A} - 1 | 0 \rangle = 1 \\ \langle 0 | \widehat{Y}_{\pi/2} | 0 \rangle &= i \langle 0 | \widehat{A}^\dagger - \widehat{A} | 0 \rangle = 0 , \end{aligned} \quad (2.87)$$

resultando sua variância dada por:

$$\langle 0 | (\Delta Y_{\pi/2})^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \widehat{Y}_{\pi/2}^2 | 0 \rangle - \langle 0 | \widehat{Y}_{\pi/2} | 0 \rangle^2 = 1 . \quad (2.88)$$

Dos resultados anteriores podemos ver que um campo elétrico no estado de vácuo possui uma intensidade média nula e flutuações iguais, diferentes de zero, nas suas quadraturas. Essa flutuação ou ruído quântico do campo no estado de vácuo é conhecido na literatura como *shot noise* ou *limite quântico padrão*.

Além das propriedades do vácuo mostradas anteriormente, esse estado do campo elétrico corresponde a um estado de mínima incerteza, pois das Eqs.(2.86) e (2.88) verifica-se a seguinte igualdade:

$$\left[ \Delta Y_0 \Delta Y_{\pi/2} \right]_{|0\rangle} = 1 . \quad (2.89)$$

## Espectro de ruído

Passaremos agora a estudar o espectro de ruído dos operadores de quadratura do campo. Para tal efeito vamos definir o operador de flutuação da quadratura generalizada no espaço de frequências,  $\delta\widehat{Y}_\theta(\Omega)$ , da seguinte maneira:

$$\delta\widehat{Y}_\theta(\Omega) \equiv \widehat{Y}_\theta(\Omega) - \langle \widehat{Y}_\theta(\Omega) \rangle . \quad (2.90)$$

A função de auto-correlação associada a essa grandeza se define da seguinte maneira:

$$\langle \delta\widehat{Y}_\theta(\Omega)\delta\widehat{Y}_\theta(\Omega') \rangle = \left\langle \left( \delta\widehat{A}(\Omega)e^{-i\theta} + \delta\widehat{A}(\Omega)e^{i\theta} \right) \left( \delta\widehat{A}(\Omega')e^{-i\theta} + \delta\widehat{A}(\Omega')e^{i\theta} \right) \right\rangle . \quad (2.91)$$

Realizando o produto indicado pela Eq.(2.91), encontramos:

$$\begin{aligned} \langle \delta\widehat{Y}_\theta(\Omega)\delta\widehat{Y}_\theta(\Omega') \rangle &= \left\langle \delta\widehat{A}(\Omega)\delta\widehat{A}(\Omega') \right\rangle e^{-2i\theta} + \left\langle \delta\widehat{A}(\Omega)\delta\widehat{A}^\dagger(\Omega') \right\rangle + \\ &+ \left\langle \delta\widehat{A}^\dagger(\Omega)\delta\widehat{A}(\Omega') \right\rangle + \left\langle \delta\widehat{A}^\dagger(\Omega)\delta\widehat{A}^\dagger(\Omega') \right\rangle e^{2i\theta} . \end{aligned} \quad (2.92)$$

A função de auto-correlação do operador de quadratura generalizado dado pela Eq.(2.92) pode ser escrita de maneira mais compacta quando se introduz a representação matricial. Para fazer isso, em primeiro lugar, vamos definir o vetor coluna:

$$\delta\widehat{\mathbf{A}}(\Omega) \equiv \left( \delta\widehat{A}(\Omega) \quad \delta\widehat{A}^\dagger(\Omega) \right)^T , \quad (2.93)$$

onde a operação  $(\dots)^T$  simboliza o cálculo do transposto de  $(\dots)$  e o vetor adjunto de  $\delta\widehat{\mathbf{A}}(\Omega)$  dado por:

$$\left( \delta\widehat{\mathbf{A}}(\Omega) \right)^\dagger \equiv \left( \delta\widehat{A}^\dagger(-\Omega) \quad \delta\widehat{A}(-\Omega) \right) . \quad (2.94)$$

Fazendo uso das expressões anteriores define-se matriz de covariância do campo  $\mathbf{C}(\Omega)$  da seguinte forma:

$$\langle \delta\widehat{\mathbf{A}}(\Omega)\delta\widehat{\mathbf{A}}^\dagger(\Omega') \rangle \equiv 2\pi\delta(\Omega + \Omega')\mathbf{C}(\Omega) . \quad (2.95)$$

Explicitamente, a matriz de covariância tem a forma [18]:

$$\mathbf{C}(\Omega) = \begin{pmatrix} \left\langle \delta\widehat{A}(\Omega)\delta\widehat{A}^\dagger(-\Omega) \right\rangle & \left\langle \delta\widehat{A}(\Omega)\delta\widehat{A}(-\Omega) \right\rangle \\ \left\langle \delta\widehat{A}^\dagger(\Omega)\delta\widehat{A}^\dagger(\Omega) \right\rangle & \left\langle \delta\widehat{A}^\dagger(\Omega)\delta\widehat{A}(-\Omega) \right\rangle \end{pmatrix} , \quad (2.96)$$

onde os valores médios  $\langle \dots \rangle$  são calculados no estado do campo considerado.

Finalmente, utilizando a representação matricial, a função de auto-correlação da quadratura generalizada do campo apresentada na Eq.(2.96), que determina as flutuações dos operadores de quadratura do campo, se expressa como:

$$\langle \delta \widehat{Y}_\theta(\Omega) \delta \widehat{Y}_\theta(\Omega') \rangle = 2\pi \delta(\Omega + \Omega') \{ [\mathbf{C}(\Omega)]_{11} + [\mathbf{C}(\Omega)]_{22} + 2\Re e [[\mathbf{C}(\Omega)]_{12} e^{-2i\theta}] \} , \quad (2.97)$$

e portanto a densidade espectral de ruído do operador  $\widehat{Y}_\theta(t)$ , definida como a transformada de Fourier da função de auto-correlação (ver Apêndice A) é:

$$S_\theta(\Omega) = [\mathbf{C}(\Omega)]_{11} + [\mathbf{C}(\Omega)]_{22} + 2\Re e [[\mathbf{C}(\Omega)]_{12} e^{-2i\theta}] . \quad (2.98)$$

As grandezas  $[\mathbf{C}(\Omega)]_{nm}$ , onde os subíndices  $n$  e  $m$  tomam os valores 1 e 2, correspondem aos elementos  $nm$  da matriz de covariância.

Em particular, para um campo no estado do vácuo:

$$[\mathbf{C}(\Omega)]_{|0\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (2.99)$$

de modo tal que sua variância, ou espectro de ruído, é dado por:

$$[V(\Omega)]_{|0\rangle} = \int \frac{d\Omega'}{2\pi} \langle \delta \widehat{Y}_\theta(\Omega) \delta \widehat{Y}_\theta(\Omega') \rangle = 1 . \quad (2.100)$$

Em função do resultado anterior vemos que um campo no estado de vácuo possui um espectro de ruído branco, independente da frequência de análise  $\Omega$ , e de igual valor para ambas quadraturas.

## 2.4.4 Estados coerentes e comprimidos

### Estados coerentes

Uma classe particularmente interessante dentre os estados do campo eletromagnéticos são os estados coerentes [19]. Os estados coerentes  $|\alpha\rangle$ , onde  $\alpha$  é um número complexo, são definidos como auto-estados do operador de aniquilação:

$$\widehat{A}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle . \quad (2.101)$$

Os estados coerentes são os estados quânticos que melhor se aproximam de estados clássicos. Estes estados podem ser produzidos por alguns lasers trabalhando bem acima do limiar. Para uma discussão detalhada das suas propriedades e da sua representação gráfica pode-se consultar a Ref. [11]

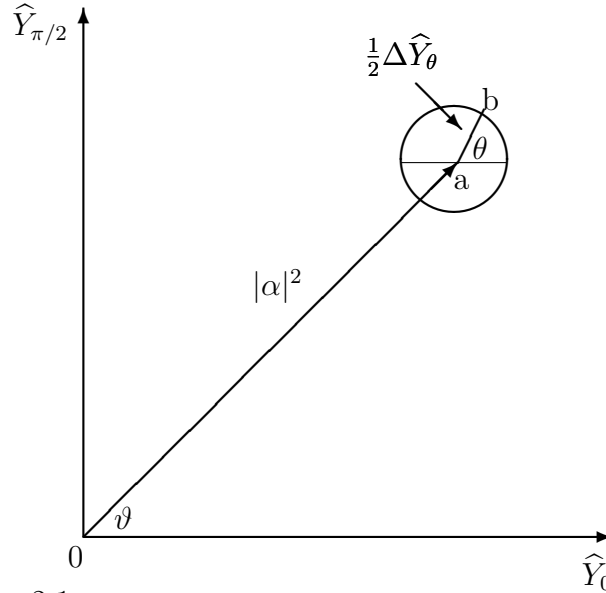


Figura 2.1: Representação de um estado coerente no espaço de fase.

Da Eq.(2.101) e da definição dada pela Eq.(2.96) podemos ver que a matriz de covariância para estes estados é equivalente à matriz de covariância do estado de vácuo, ou seja:

$$[\mathbf{C}(\Omega)]_{|\alpha\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.102)$$

de modo tal que:

$$[V(\Omega)]_{|\alpha\rangle} = 1, \quad (2.103)$$

e, por conseguinte, os estados coerentes também são estados de incerteza mínima, com as mesmas flutuações em ambas quadraturas. A Fig.2.1 representa um estado coerente  $|\alpha = |\alpha|e^{i\vartheta}\rangle$  no espaço de fase  $\{\hat{Y}_0, \hat{Y}_{\pi/2}\}$ . O comprimento do segmento  $\overline{0a}$  é determinado pela intensidade do campo que, em termos do número médio de fótons, corresponde a  $|\alpha|^2$ . A dispersão da quadratura generalizada  $\Delta Y_\theta$  é dada pelo segmento  $\overline{ab}$  e é igual para qualquer ângulo  $\theta$ .

### Estados comprimidos

Além dos estados coerentes existem estados que apresentam ruído de uma das quadraturas inferior ao limite quântico padrão, Eq.(2.100), sendo que a

quadratura conjugada apresenta excesso de ruído para a mesma frequência. Quando o produto das incertezas das quadraturas desse estado for 1, diz-se que esse é um estado comprimido de incerteza mínima. Se a compressão do ruído se dá, por exemplo, na quadratura amplitude, estamos em presença de um estado sub-poissoniano.

Do ponto de vista matemático, um estado comprimido  $|\alpha, \xi\rangle$  resulta da ação do operador deslocamento [19]:

$$\widehat{D}(\alpha) = e^{\alpha\widehat{A}^\dagger - \alpha^*\widehat{A}}, \quad (2.104)$$

sobre o estado de vácuo, seguido da ação do operador de compressão [11]:

$$\widehat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^*\widehat{A}^2 - \xi\widehat{A}^{\dagger 2})}, \quad (2.105)$$

sobre o estado resultante, com  $\xi = re^{i\phi}$ , ou seja:

$$|\alpha, \xi\rangle = \widehat{S}(\xi)\widehat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (2.106)$$

Fazendo uso das propriedades dos operadores de deslocamento e compressão, podemos ver que a matriz de covariância para um campo no estado comprimido se escreve:

$$[\mathbf{C}(\Omega)]_{|\alpha, \xi\rangle} = \begin{pmatrix} \cosh^2(r) & \frac{1}{2} \sinh(2r)e^{i\phi} \\ \frac{1}{2} \sinh(2r)e^{-i\phi} & \sinh^2(r) \end{pmatrix}, \quad (2.107)$$

onde os parâmetros  $r$  e  $\phi$  determinam o grau de compressão e a quadratura comprimida, respectivamente. Dado que essa matriz não depende da frequência de análise  $\Omega$ , ela descreve um campo comprimido de banda larga.

## 2.5 Medida das propriedades estatísticas do campo eletromagnético

Uma caracterização do estado do campo elétrico é feita por meio do estudo das flutuações do operador de quadratura generalizado  $\widehat{Y}_\theta(t)$ . Experimentalmente, as medidas das flutuações do campo são realizadas com um analisador de espectro<sup>2,3</sup>, cuja medida se baseia no batimento entre o sinal de fotocorrente

<sup>2</sup>ver, por exemplo, o manual do analisador de espectros Hewlett-Packard 8560 E; “Spectrum Analysis Basics”, application note 150, Hewlett-Packard Company.

<sup>3</sup>“The Fundamentals of Signal Analysis”, application note 243, Agilent Technologies; “Spectrum Analyzer Measurement and Noise”, application note 1303, Agilent Technologies. <http://www.agilent.com>.



gerado pelo feixe de luz que incide no detetor e o sinal de seu oscilador local interno.

A operação de batimento, mais conhecida na literatura técnica como detecção heterodina (no caso do analisador) leva o sinal a ser estudado do domínio temporal ao domínio da frequência, realizando assim a transformada de Fourier do mesmo e permitindo obter de forma direta a densidade espectral do ruído  $S(\Omega)$  [20].

Nesta seção apresentaremos duas técnicas experimentais para medir as propriedades estatísticas de um campo eletromagnético. Em primeiro lugar apresentaremos a técnica de detecção homodina, amplamente utilizada quando se deseja medir o ruído das quadraturas de um campo após interação com algum meio (vapor atômico, cristal etc.). Em segundo lugar, apresentaremos a técnica que utiliza o feixe refletido por uma cavidade vazia (em anel, Fabry-Perot etc.) apropriada para medir o ruído das quadraturas de um único campo.

### 2.5.1 Detecção homodina

Nesta técnica experimental [21], amplamente utilizada em ótica quântica, a medida do ruído dos operadores de quadratura do campo é obtida através do batimento ótico do feixe de luz laser analisado com um feixe de luz intenso em estado coerente o qual realiza a função de oscilador local e que tem a mesma frequência ou comprimento de onda do feixe de luz a ser estudado.

O esquema básico da detecção homodina consiste de um divisor de feixes caracterizado pelos coeficientes de amplitude de transmissão e de reflexão  $t$  e  $r$ , respectivamente, tais que:

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 . \quad (2.108)$$

Como pode ser visto na Fig.2.2 os feixes, após serem combinados no divisor de feixe  $BS_1$ , são enviados aos detetores  $D_1$  e  $D_2$ , cujas fotocorrentes podem ser somadas ou subtraídas através do misturador ( $\pm$ ). O sinal elétrico gerado é enviado ao Analisador de Espectros A.S.

A seguir, vamos mostrar a sensibilidade da detecção homodina para o estudo das flutuações das quadraturas do campo.

Os campos que incidem no divisor de feixe mostrado na Fig.2.2, podem ser representados pelos operadores de aniquilação  $\hat{A}(t)$  e  $\hat{A}_{OL}$ , o qual representa o oscilador local. Desprezando as perdas, na saída do divisor de feixe os campos podem ser escritos como:

$$\hat{C}(t) = t\hat{A}(t) + r\hat{A}_{OL} , \quad (2.109)$$

$$\hat{D}(t) = -r\hat{A}(t) + t\hat{A}_{OL} , \quad (2.110)$$

onde o sinal ( $-$ ) na Eq.(2.110) leva em conta a conservação da energia.

Na detecção balanceada  $t = r = 1/\sqrt{2}$ , assim:

$$\hat{C}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{A}(t) + \hat{A}_{\text{OL}} \right) , \quad (2.111)$$

$$\hat{D}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\hat{A}(t) + \hat{A}_{\text{OL}} \right) , \quad (2.112)$$

e, por conseguinte, o operador  $\hat{N}_{(-)}(t)$ , cujo valor médio determina a diferença entre os números de fótons dos campos detectados, é dado por:

$$\hat{N}_{(-)}(t) = \hat{C}^\dagger(t)\hat{C}(t) - \hat{D}^\dagger(t)\hat{D}(t) = \hat{A}_{\text{OL}}^\dagger\hat{A}(t) + \hat{A}^\dagger(t)\hat{A}_{\text{OL}} . \quad (2.113)$$

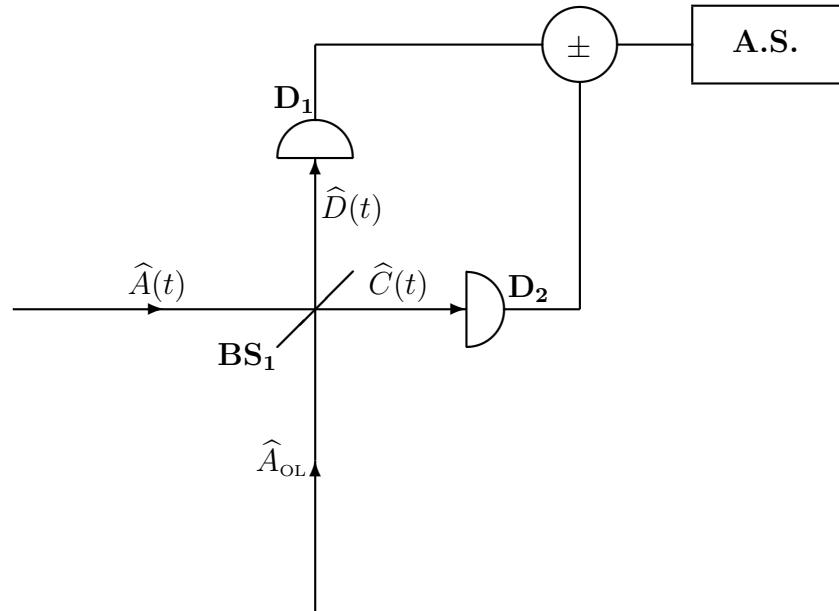


Figura 2.2: Esquema básico para a detecção homodina. BS<sub>1</sub>: divisor de feixe; D<sub>1,2</sub>: detectores;  $\pm$ : misturador de fotocorrentes; A.S.: analisador de espectros.

Dado que o oscilador local corresponde a um campo laser de alta intensidade num estado coerente, o operador  $\hat{A}_{\text{OL}}$  pode ser substituído pela sua variável clássica correspondente, por exemplo:

$$\beta = |\beta|e^{i\theta} ,$$

e portanto:

$$\hat{N}_{(-)}(t) = |\beta| \left( e^{-i\theta}\hat{A}(t) + e^{i\theta}\hat{A}^\dagger(t) \right) , \quad (2.114)$$

a qual, usando a definição dada pela Eq.(2.77) para o operador de quadratura generalizado  $\widehat{Y}_\theta(t)$ , se transforma em:

$$\widehat{N}_{(-)}(t) = |\beta| \widehat{Y}_\theta(t) . \quad (2.115)$$

Assim, o esquema de detecção homodina permite-nos definir e fazer uma medida de uma grandeza física que é diretamente proporcional ao operador de quadratura generalizado. Em outros termos, o esquema da detecção homodina nos permite o acesso direto ao valor médio e às flutuações das quadraturas do campo em estudo.

### Ruído de intensidade de um campo

Através da técnica de detecção homodina, também temos acesso ao ruído de intensidade do campo. Para este caso, devemos realizar a soma das fotocorrentes, o que nos permite obter o operador que corresponde à soma dos números de fótons dos campos detectados:

$$\widehat{N}_{(+)}(t) = \widehat{C}^\dagger(t)\widehat{C}(t) + \widehat{D}^\dagger(t)\widehat{D}(t) = \widehat{A}^\dagger(t)\widehat{A}(t) + \widehat{A}_{\text{OL}}^\dagger\widehat{A}_{\text{OL}} . \quad (2.116)$$

Substituindo o oscilador local pelo estado de vácuo eletromagnético, a Eq.(2.116) permite estudar as flutuações quânticas da intensidade (número de fótons) do feixe de luz incidente. O nível de referência para o ruído é determinado a partir da Eq.(2.113), onde o campo incidente  $\widehat{A}(t)$  realiza a função de oscilador local para o vácuo que entra pela outra porta de entrada do divisor de feixe.

### 2.5.2 Medidas do ruído usando uma cavidade vazia

A conversão de ruído de fase em ruído de intensidade e, vice versa, pode ser obtida com uma cavidade em anel ou Fabry-Perot vazia, na qual só um dos espelhos (de acoplamento) tem um coeficiente de reflexão inferior à unidade. Esta cavidade introduz um deslocamento na fase do campo que depende da frequência de análise.

O tratamento que apresentamos nesta seção baseia-se no tratamento apresentado por Galatola e colaboradores [22], sobre o espectro de compressão de ruído de um campo refletido por uma cavidade vazia e com só uma relação de entrada-saída. Neste trabalho os autores apresentam, por um lado, os resultados para o caso em que o campo incidente na cavidade é o vácuo comprimido, no qual a elipse das flutuações pode ser rodada à vontade variando o comprimento da cavidade. Por outro lado, apresentam o caso de um campo

comprimido de valor médio muito maior que as flutuações. Neste caso, o ângulo relativo entre a elipse das flutuações e o valor médio do campo pode ser rodado arbitrariamente para uma banda de frequências da ordem da largura de linha do campo intracavidade.

A possibilidade de rotação total da elipse das flutuações com relação ao valor médio do campo significa que, variando o comprimento da cavidade, a compressão de fase pode ser convertida em compressão de amplitude e vice versa; uma estatística de fótons super-poissoniana pode ser convertida em sub-poissoniana. Além disso, uma rotação completa da elipse das flutuações implica na possibilidade de descartar o oscilador local para detectar o ruído de fase do campo.

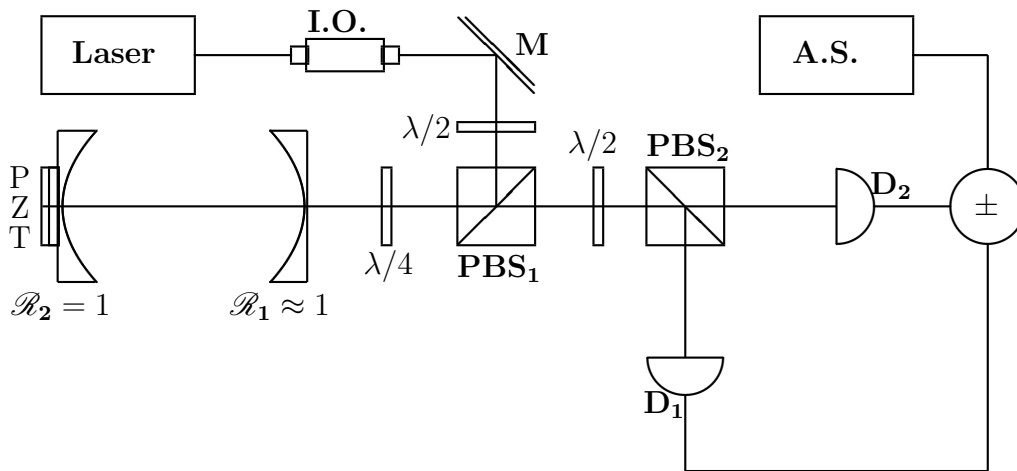


Figura 2.3: Desenho esquemático da montagem para medidas do ruído de quadraturas de um campo através do feixe que sai de uma cavidade Fabry-Perot. I.O.: Isolador Ótico; PBS<sub>1,2</sub>: Divisor de feixe polarizante; A.S.: Analisador de Espectros; D<sub>1,2</sub>: Detetores; ±: misturador de fotocorrentes.

O arranjo experimental utilizado para esse tipo de medidas é apresentado na Fig.2.3. O feixe do campo a ser analisado (por exemplo, o feixe de luz emitido por um diodo laser com cavidade estendida e estabilizado em corrente e temperatura) é polarizado linearmente de modo tal que a componente refletida por um divisor de feixe polarizante (PBS) é enviada a uma cavidade Fabry-Perot (cavidade de análise<sup>4</sup>). Antes de entrar na cavidade o feixe atravessa uma lâmina de quarto de onda, orientada de maneira a gerar uma polarização circular do feixe. O feixe de análise é uma superposição do feixe diretamente refletido pelo espelho de acoplamento da cavidade M<sub>1</sub> com o feixe que percorreu a cavidade. Este feixe atravessa novamente a lâmina de quarto de onda, onde a polarização circular é convertida numa polarização linear ortogonal à original,

<sup>4</sup>Esta cavidade de análise não deve ser necessariamente do tipo Fabry-Perot. Os mesmos resultados são obtidos como uma cavidade em anel.

de modo tal que é transmitida pelo divisor de feixe polarizante. O feixe é enviado, em seguida, a um esquema de detecção balanceada.

### Rotação de fase

Para começar a derivação das expressões que nos permitem entender como podem ser feitas as medidas do ruído do campo com ajuda de uma cavidade vazia, da Eq.(2.73) podemos escrever a componente de frequência positiva do operador de campo elétrico que incide no espelho de acoplamento da cavidade,  $\widehat{E}_{in}^+(t)$ , para análise da rotação das quadraturas do campo, da seguinte forma:

$$\widehat{E}_{in}^+(t) = \mathcal{E}_{0L} \left[ \alpha_{in} + \delta \widehat{A}_{in}(t) \right] e^{-i\omega_L t}, \quad (2.117)$$

onde  $\mathcal{E}_{0L}$  é a amplitude constante do campo,  $\omega_L$  a frequência de oscilação,  $\alpha_{in}$  o valor médio da amplitude do campo no estado estacionário e  $\delta \widehat{A}_{in}(t)$  a flutuação da amplitude em torno do valor médio.

A componente de frequência positiva do operador de campo de saída da cavidade  $\widehat{E}_{out}^+(t)$ , tem a mesma frequência de oscilação do campo incidente e difere dele só por um fator de fase, que depende da frequência do campo e da geometria da cavidade. Assim, podemos escrevê-lo, de modo geral, da seguinte forma:

$$\widehat{E}_{out}^+(t) = \mathcal{E}_{0L} \left[ \alpha_{out} + \delta \widehat{A}_{out}(t) \right] e^{-i\omega_L t}. \quad (2.118)$$

O fator de fase do campo de saída da cavidade é obtido pelas condições de contorno no espelho de acoplamento, dadas pelas combinações das Eqs.(2.67 - 2.70)<sup>5</sup>, das quais encontramos as seguintes relações.

$$\alpha_{out} = \mathcal{F}(\Delta_c) \alpha_{in} \quad ; \quad \mathcal{F}(\Delta_c) = \frac{\gamma - 2i\Delta_c}{\gamma + 2i\Delta_c}, \quad (2.119)$$

$$\delta \widehat{A}_{out}(\Omega) = \mathcal{F}(\Delta_c - \Omega) \delta \widehat{A}_{in}(\Omega) \quad ; \quad \mathcal{F}(\Delta_c - \Omega) = \frac{\gamma - 2i(\Delta_c - \Omega)}{\gamma + 2i(\Delta_c - \Omega)}, \quad (2.120)$$

$$\delta \widehat{A}_{out}^\dagger(\Omega) = \mathcal{F}'(\Delta_c + \Omega) \delta \widehat{A}_{in}^\dagger(\Omega) \quad ; \quad \mathcal{F}'(\Delta_c + \Omega) = \frac{\gamma + 2i(\Delta_c + \Omega)}{\gamma - 2i(\Delta_c + \Omega)}, \quad (2.121)$$

onde  $\Delta_c = \omega_L - \omega_c$  é a dessintonia da cavidade e  $\gamma = \mathcal{I}/\tau$  a largura de

<sup>5</sup>As relações entre os operadores do campo incidente  $\widehat{A}^{in}(t)$ , intracavidade  $\widehat{A}(t)$  e de saída  $\widehat{A}^s(t)$  são derivadas no Apêndice C.

linha do campo intracavidade ( $\mathcal{T}$  é o coeficiente de transmissão do espelho de acoplamento e  $\tau$  o tempo que o fóton leva para percorrer uma vez a cavidade).

Lembrando a definição da quadratura generalizada do campo, no espaço de frequências, vamos escrever:

$$\delta\widehat{Y}_{in,out}(\Omega, \theta) = \delta\widehat{A}_{in,out}(\Omega)e^{-i\theta} + \delta\widehat{A}_{in,out}^\dagger(\Omega)e^{i\theta} . \quad (2.122)$$

Da definição da função de auto-correlação das grandezas definidas pela Eq.(2.91), encontramos:

$$\begin{aligned} \langle \delta\widehat{Y}(\Omega, \theta)\delta\widehat{Y}(\Omega', \theta) \rangle &= \langle \delta\widehat{A}(\Omega)\delta\widehat{A}(\Omega') \rangle e^{-2i\theta} + \langle \delta\widehat{A}(\Omega)\delta\widehat{A}^\dagger(\Omega') \rangle + \\ &+ \langle \delta\widehat{A}^\dagger(\Omega)\delta\widehat{A}(\Omega') \rangle + \langle \delta\widehat{A}^\dagger(\Omega)\delta\widehat{A}^\dagger(\Omega') \rangle e^{2i\theta} , \end{aligned} \quad (2.123)$$

onde os índices foram omitidos por comodidade.

Por outro lado, lembrando que a densidade espectral do ruído do operador  $\widehat{Y}(t, \theta)$  define-se como a transformada de Fourier da função de auto-correlação, temos:

$$\mathbf{S}(\Omega, \theta) = \mathbf{S}^{(a)}(\Omega) + \mathbf{S}^{(a)}(-\Omega) + 2\Re\left\{ \mathbf{S}^{(b)}(\Omega)e^{-2i\theta} \right\} . \quad (2.124)$$

Fazendo uso das Eq.(2.120) e (2.121), encontramos as seguintes relações entre as funções  $\mathbf{S}_{out}^{(a)}(\Omega)$  e  $\mathbf{S}_{in}^{(a)}(\Omega)$ :

$$\mathbf{S}_{out}^{(a)}(\Omega) = \mathbf{S}_{in}^{(a)}(\Omega) = \langle \delta\widehat{A}_{in}(\Omega)\delta\widehat{A}_{in}^\dagger(-\Omega) \rangle , \quad (2.125)$$

$$\mathbf{S}_{out}^{(a)}(-\Omega) = \mathbf{S}_{in}^{(a)}(-\Omega) = \langle \delta\widehat{A}_{in}^\dagger(\Omega)\delta\widehat{A}_{in}(-\Omega) \rangle . \quad (2.126)$$

Do mesmo modo encontramos:

$$\mathbf{S}_{out}^{(b)}(\Omega) = \mathcal{F}(\Delta_c - \Omega)\mathcal{F}(\Delta_c + \Omega)\mathbf{S}_{in}^{(b)}(\Omega) , \quad (2.127)$$

para a relação entre  $\mathbf{S}_{out}^{(b)}(\Omega)$  e  $\mathbf{S}_{in}^{(b)}(\Omega)$ , com:

$$\mathbf{S}_{in}^{(b)}(\Omega) = \langle \delta\widehat{A}_{in}(\Omega)\delta\widehat{A}_{in}(-\Omega) \rangle . \quad (2.128)$$

Vemos que a Eq.(2.124) para os campos incidente e de saída da cavidade, se escreve finalmente como:

$$\mathbf{S}_{in}(\Omega, \theta) = \mathbf{S}_{in}^{(a)}(\Omega) + \mathbf{S}_{in}^{(a)}(-\Omega) + 2\Re\left\{ \mathbf{S}_{in}^{(b)}(\Omega)e^{-2i\theta} \right\} \quad (2.129)$$

e

$$\mathbf{S}_{out}(\Omega, \theta) = \mathbf{S}_{in}^{(a)}(\Omega) + \mathbf{S}_{in}^{(a)}(-\Omega) + 2\Re e \left\{ \mathbf{S}^{(b)in}(\Omega) e^{-2i(\theta - \Theta_1(\Delta_c, \Omega))} \right\} \quad (2.130)$$

respectivamente, onde:

$$e^{i\Theta_1(\Delta_c, \Omega)} = \mathcal{F}(\Delta_c - \Omega) \mathcal{F}(\Delta_c + \Omega) . \quad (2.131)$$

Das Eqs.(2.129) e (2.130) vemos que a cavidade introduz uma rotação (que depende da frequência de análise) na elipse do ruído do campo de um ângulo  $\Theta_1(\Delta_c, \Omega)$ , dado pela Eq.(2.131). Para uma dada frequência de análise  $\Omega$ , este ângulo pode ser variado no intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ , quando a frequência da cavidade é variada.

Antes de prosseguir com a derivação, vamos redefinir a taxa de amortecimento do campo intracavidade como  $\gamma = 2\kappa$ , deste modo podemos definir as seguintes funções normalizadas:

$$\Delta_\kappa = \frac{\Delta_c}{\kappa} \quad ; \quad \Omega_\kappa = \frac{\Omega}{\kappa} . \quad (2.132)$$

Vemos que as expressões do lado direito das Eqs.(2.119), (2.120) e (2.121) se reescrevem da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta_\kappa) &= \frac{1 - i\Delta_\kappa}{1 + i\Delta_\kappa} , \\ \mathcal{F}(\Delta_\kappa - \Omega_\kappa) &= \frac{1 - i(\Delta_\kappa - \Omega_\kappa)}{1 + i(\Delta_\kappa - \Omega_\kappa)} , \\ \mathcal{F}'(\Delta_\kappa + \Omega_\kappa) &= \frac{1 + i(\Delta_\kappa + \Omega_\kappa)}{1 - i(\Delta_\kappa + \Omega_\kappa)} , \end{aligned}$$

das quais podemos ver que a Eq.(2.131) se transforma em:

$$e^{2i\Theta_1(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa)} = \frac{1 - 2i\Delta_\kappa - (\Delta_\kappa^2 - \Omega_\kappa^2)}{1 + 2i\Delta_\kappa - (\Delta_\kappa^2 + \Omega_\kappa^2)} , \quad (2.133)$$

da qual chegamos a:

$$\Theta_1(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa) = -\tan^{-1} \left( \frac{2\Delta_\kappa}{1 - (\Delta_\kappa^2 - \Omega_\kappa^2)} \right) . \quad (2.134)$$

Com o fim de ilustrarmos isso, na Fig.2.4 são mostradas curvas de rotação da elipse do ruído do campo em função da dessintonia da cavidade  $\Delta_\kappa$  para

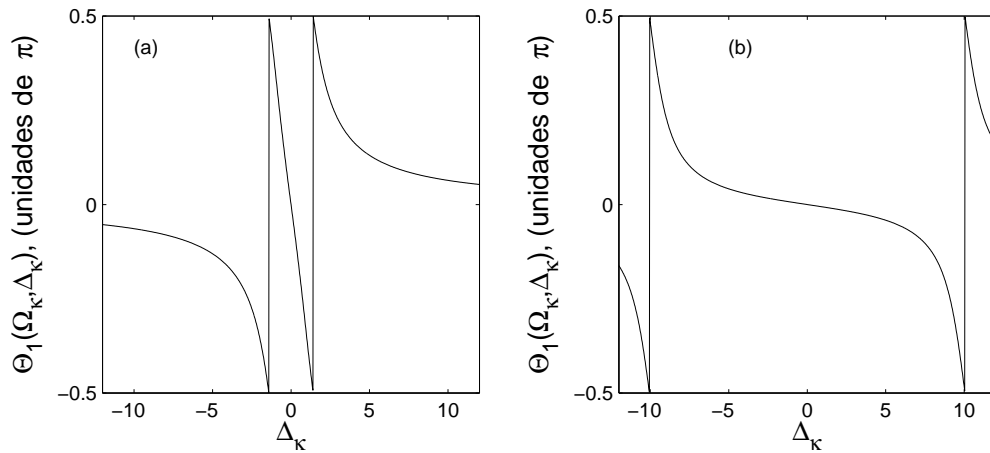


Figura 2.4: Ângulo de rotação da elipse do ruído do campo  $\Theta_1(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa)$  em função da dessintonia  $\Delta_\kappa$  para dois diferentes valores de frequência de análise.  $\Omega_\kappa = 1$  curva (a) e  $\Omega_\kappa = 10$  curva (b).

dois valores diferentes de frequência de análise:  $\Omega_\kappa = 1$  curva (a) e  $\Omega_\kappa = 10$  curva (b).

Quando o valor médio do campo incidente  $\alpha_{in}$  na cavidade é zero, a única informação da fase do campo está contida na orientação da elipse do ruído com relação a um sistema de referências arbitrário. Neste caso, os resultados apresentados na Fig.2.4 mostram que é possível variar, para cada uma das componentes de frequência, essa orientação variando a dessintonia da cavidade, i.e., o comprimento da mesma, sem variar o ruído do campo, pelo menos no caso de uma cavidade ideal sem perdas.

No entanto, para cada par de componentes da frequência pode-se obter o mesmo resultado para propagação livre do campo. Neste caso, o fator de fase  $\mathcal{F}(\Delta_c)$  da Eq.(2.119) é dado por:

$$\mathcal{F}(\Delta_c) = e^{i(\omega/c)\Delta} , \quad (2.135)$$

onde  $\Delta$  é o caminho percorrido pela luz. Usando esta expressão podemos ver que a Eq.(2.131) se escreve da seguinte forma:

$$e^{2i\Theta_1} = \mathcal{F}(\omega_L - \omega)\mathcal{F}(\omega_L + \omega) = e^{2i(\omega/c)\Delta} , \quad (2.136)$$

e, por conseguinte, o ângulo de rotação  $\Theta_1$  pode ser variado. Em outras palavras, para propagação livre o espectro sofre uma rotação rígida para todas as frequências de análise.

A presença da cavidade, por outro lado, atua como um filtro de fase que introduz uma rotação diferente para cada par de componentes de frequência. Isso será explorado com maior detalhe na próxima seção.



### Rotação relativa de fase

Quando o valor médio do campo incidente é diferente de zero, o campo carrega uma informação da fase bem definida, a fase do seu valor médio. Podemos falar de flutuações de amplitude ou de fase ou, de maneira geral, das flutuações de uma dada quadratura do campo com relação ao seu valor médio.

A quantidade de importância neste caso é a orientação da elipse do ruído do campo com relação ao valor médio do mesmo. Vamos tomar  $\varphi_{in}$  e  $\varphi_{out}$  como as fases dos valores médios dos campos incidentes e de saída da cavidade com relação a um sistema de referência arbitrário. Em função da Eq.(2.119) elas satisfazem a seguinte relação:

$$\varphi_{out} = \varphi_{in} + \Phi(\Delta_\kappa) , \quad (2.137)$$

onde a rotação da fase  $\Phi(\Delta_\kappa)$  é obtida a partir da expressão:

$$\mathcal{F}(\Delta_\kappa) = e^{i\Phi(\Delta_\kappa)} . \quad (2.138)$$

Da expressão do lado direito da Eq.(2.119), em função da dessintonia normalizada  $\Delta_\kappa$ , encontramos:

$$e^{i\Phi(\Delta_\kappa)} = \frac{1 - 2i\Delta_\kappa - \Delta_\kappa^2}{1 + \Delta_\kappa^2} ; \quad \Phi(\Delta_\kappa) = -\tan^{-1} \left( \frac{2\Delta_\kappa}{1 - \Delta_\kappa^2} \right) , \quad (2.139)$$

com  $-\pi/2 \leq \Phi \leq \pi/2$ .

Se introduzimos a fase relativa  $\bar{\theta}$  das componentes do ruído incidente e de saída com relação aos valores médios correspondentes:

$$\bar{\theta}_{in} = \theta - \varphi_{in} , \quad (2.140)$$

$$\bar{\theta}_{out} = \theta - \varphi_{out} , \quad (2.141)$$

onde  $\theta$  caracteriza a quadratura do campo é definimos:

$$\bar{\mathbf{S}}_{in}^{(b)}(\Omega) = \mathbf{S}_{in}^{(b)}(\Omega)e^{-2i\varphi_{in}} , \quad (2.142)$$

vemos que as Eqs.(2.129) e (2.130) se transformam em:

$$\mathbf{S}_{in}(\Omega, \theta) = \mathbf{S}_{in}^{(a)}(\Omega) + \mathbf{S}_{in}^{(a)}(-\Omega) + 2\Re \left\{ \mathbf{S}^{(b)in}(\Omega)e^{-2i\bar{\theta}_{in}} \right\} \quad (2.143)$$

e

$$\mathbf{S}_{out}(\Omega, \theta) = \mathbf{S}_{in}^{(a)}(\Omega) + \mathbf{S}_{in}^{(a)}(-\Omega) + 2\Re \left\{ \bar{\mathbf{S}}^{(b)in}(\Omega)e^{-2i(\bar{\theta}_{out} - \Theta(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa))} \right\} , \quad (2.144)$$

respectivamente, onde o ângulo  $\Theta(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa) = \Theta_1(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa) - \Phi(\Delta_\kappa)$  descreve a rotação relativa da elipse do ruído com relação ao valor médio do campo e é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} e^{2i\Theta(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa)} &= \frac{e^{2i\Theta_1(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa)}}{e^{2i\Phi(\Delta_\kappa)}} = \frac{\mathcal{F}(\Delta_\kappa - \Omega_\kappa)\mathcal{F}(\Delta_\kappa + \Omega_\kappa)}{\mathcal{F}^2(\Delta_\kappa)} \\ &= \frac{(1 + \Delta_\kappa^2)^2 + \Omega_\kappa^2(1 - \Delta_\kappa^2) + 2i\Omega_\kappa^2\Delta_\kappa}{(1 + \Delta_\kappa^2)^2 - \Omega_\kappa^2(1 - \Delta_\kappa^2) + 2i\Omega_\kappa^2\Delta_\kappa}. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Encontramos, assim, a seguinte expressão para o ângulo  $\Theta(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa)$ :

$$\Theta(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa) = \tan^{-1} \left( \frac{2\Omega_\kappa^2\Delta_\kappa}{(1 + \Delta_\kappa^2)^2 + \Omega_\kappa^2(1 - \Delta_\kappa^2)} \right). \quad (2.146)$$

Da Eq.(2.146) podemos ver que o ângulo  $\Theta(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa)$  é zero para  $\Delta_\kappa = 0$  e uma função ímpar de  $\Delta_\kappa$  para  $\Delta_\kappa \neq 0$ . Além disso, esse ângulo também é zero para  $\Omega_\kappa = 0$ , o que significa que não se pode variar completamente o ângulo relativo entre o ruído e o valor médio do campo para baixas frequências; existe uma banda de frequências centrada em torno da origem que sofrerá só uma rotação parcial. Como podemos ver da Eq.(2.146), com o fim de poder variar todo o intervalo da rotação do ângulo desde 0 até  $\pi/2$ , quando  $\Delta_\kappa$  aumenta desde zero até um certo valor  $\bar{\Delta}_\kappa$ , é necessário que o denominador dessa equação seja zero. Isto é possível se:

$$\Omega_\kappa = \frac{\Omega}{\kappa} \geq \sqrt{2}. \quad (2.147)$$

Quando a condição dada pela Eq.(2.147) é satisfeita, os valores de  $\Delta_\kappa$  para os quais  $\Theta(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa) = \pm\pi/2$  são dados pela seguinte expressão:

$$(\Delta_\kappa)_\pm = \left\{ \frac{\Omega_\kappa^2 - 2 \pm \Omega_\kappa \sqrt{\Omega_\kappa^2 - 8}}{2} \right\}^{1/2}, \quad (2.148)$$

e o valor  $\bar{\Delta}_\kappa$  corresponde ao valor  $(\Delta_\kappa)_-$  da expressão anterior.

Novamente, com o fim de ilustrar o anterior, na Fig.2.5 mostramos curvas para a rotação relativa da elipse de ruído do campo  $\Theta(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa)$  em função da dessintonia da cavidade  $\Delta_\kappa$  para os mesmos valores de frequência de análise usados nas curvas (a) e (b) da Fig.2.4, respectivamente. Como podemos ver, após a condição dada pela Eq.(2.147) ser satisfeita, uma variação em  $\Delta_\kappa$  de umas poucas unidades faz com que  $\Theta(\Omega_\kappa, \Delta_\kappa)$ , para uma dada frequência de análise, cubra todo o intervalo desde  $-\pi/2$  até  $\pi/2$ .

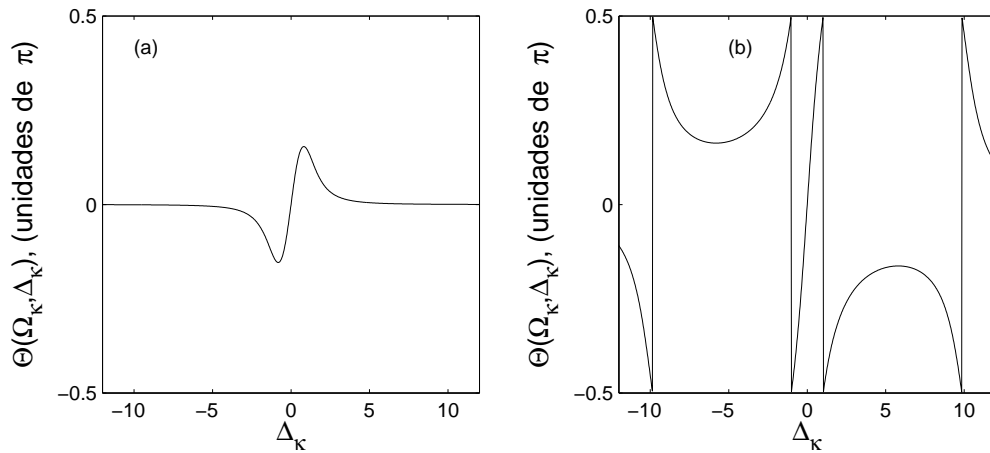


Figura 2.5: Ângulo de rotação relativo da elipse do ruído  $\Theta(\Delta_\kappa, \Omega_\kappa)$  em função da dessintonia  $\Delta_\kappa$ .  $\Omega_\kappa = 1$  curva (a) e  $\Omega_\kappa = 10$  curva (b).

É importante destacar que, quando  $\Omega_\kappa$  torna-se grande, a dependência em frequência da fase  $\Theta(\Omega_\kappa, \Delta_\kappa)$  desaparece, dado que, no limite  $\Omega_\kappa \rightarrow \infty$  (com  $\Delta_\kappa$  fixa), o deslocamento do ruído de fase  $\Theta_1(\Omega_\kappa, \Delta_\kappa)$  tende a zero [ver Eq.(2.146)], logo  $\Theta(\Omega_\kappa, \Delta_\kappa)$  torna-se igual a  $-\Phi(\Delta_\kappa)$ , com  $\Phi(\Delta_\kappa)$  dado pela Eq.(2.139).

Dos resultados anteriores, vemos que a rotação do ângulo de fase relativo entre o ruído e o valor médio do campo, para um campo incidente com compressão (ou excesso) de ruído, significa que estamos capacitados, ajustando o parâmetro de dessintonia da cavidade  $\Delta_\kappa$ , para transferir a compressão (ou excesso) do ruído no campo de saída desde a amplitude para a fase e, vice versa.

Quando o valor médio do campo incidente é muito maior do que as flutuações, o espectro de ruído das flutuações de amplitude ( $\bar{\theta}_{in} = 0$  na Eq.(2.140), para o campo incidente e  $\bar{\theta}_{out} = 0$  na Eq.(2.141), para o campo de saída) coincidem com o espectro das flutuações de intensidade [23], que pode ser medido por detecção direta do campo de saída da cavidade sem usar um oscilador local.

## 2.6 Comentários finais

Neste capítulo desenvolvemos as ferramentas matemáticas que nos permitirão tratar a interação dos campos e os átomos nas descrições dos modelos teóricos - quântico (Cap.5) e semi-clássico (Cap.6) - desenvolvidos para o estudo do ruído e as correlações - de intensidade e de fase - entre os campos de bombeio e sonda na transparência induzida eletromagneticamente. Além disso, apresentamos as técnicas de detecção homodina e de rotação da elipse das flutuações em torno do valor médio do campo, através do uso de uma cavidade de

análise (vazia), comumente usadas para medir as flutuações das quadraturas dos campos. Ambas técnicas serão empregadas para a obtenção dos resultados experimentais que apresentaremos no Cap.4.

Antes de passarmos à descrição dos resultados experimentais e dos correspondentes modelos teóricos desenvolvidos com o objetivo de interpretá-los, consideramos conveniente uma breve descrição do fenômeno que constitui a base deste trabalho: a transparência induzida eletromagneticamente. A descrição e interpretação deste fenômeno podem, perfeitamente, ser entendidos com base na explicação do aprisionamento coerente de população, do qual se originou. Sendo assim, o próximo capítulo é destinado a apresentar algumas das características destes fenômenos.

# Capítulo 3

## Aprisionamento coerente de população e transparência induzida eletromagneticamente

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior descrevemos os modelos clássico e quântico dos campos eletromagnéticos, que serão usados nos respectivos modelos teóricos, para o estudo das flutuações dos mesmos no processo de interação com uma amostra atômica e na condição de transparência induzida eletromagneticamente.

A interação desses campos com os átomos nem sempre leva a resultados intuitivos; por exemplo, a idéia de que os lasers, dispositivos associados tradicionalmente com armas de raios e aquecimento de objetos possam “resfriar”, parece contradizer o senso comum. Ainda, a mecânica quântica diz-nos que esse resfriamento poder ser muito próximo do zero absoluto.

Outro estranho tipo de interação entre os campos e os átomos é a base deste trabalho: Transparência Induzida Eletromagneticamente, EIT, (do inglês, *Electromagnetically Induced Transparency*). Teoricamente, sabemos que um feixe de luz laser propagando-se num meio atômico é absorvido; se um segundo feixe de luz se propaga no mesmo meio, sob condições apropriadas, nenhum dos dois será absorvido, i.e., um meio opaco torna-se transparente. Outro fenômeno contra intuitivo é o do laser sem inversão de população, LWI, (do inglês, *Lasing Without Inversion*), um processo através do qual a ação laser é alcançada sem a necessidade de inversão de população, contrário ao aprendido em alguns cursos introdutórios de ótica.

Todos esses fenômenos são entendidos com base em teorias que descrevem processos de interação da luz e a matéria. Além disso, esses fenômenos estão estreitamente relacionados e formam parte de um fenômeno muito mais geral: o Aprisionamento Coerente de População, CPT, (do inglês, *Coherent Population Trapping*). O objetivo deste capítulo é o de apresentar uma re-

visão bibliográfica e algumas das características de dois desses fenômenos: o de aprisionamento coerente de população e o de transparência induzida eletromagneticamente.

## 3.2 Aprisionamento coerente de população

A propagação da luz através de um meio é acompanhada de absorção e dispersão [11]: constante excitação dos átomos aos seus estados excitados fluorescentes. Esta interação é a base da investigação espectroscópica de átomos e moléculas.

A interação de dois campos eletromagnéticos contínuos com um sistema atômico de três níveis leva o sistema acoplado átomos–campos, sob condições apropriadas, a uma superposição coerente de estados que é estável na não absorção dos campos. Este fenômeno foi designado com o nome de aprisionamento coerente de população, CPT, para indicar a presença da superposição coerente dos estados atômicos e a estabilidade da população. Este aprisionamento coerente de população pode ser descrito, como o bombeamento de um sistema atômico a um estado particular; a superposição coerente dos estados atômicos que corresponde a um estado com absorção nula. Os campos eletromagnéticos criam uma coerência atômica tal que a evolução dos átomos é preparada exatamente fora de fase com os campos incidentes, de modo que não há absorção dos mesmos. Este fenômeno foi observado pela primeira vez por Alzetta e colaboradores [24], como uma diminuição na emissão da fluorescência num experimento de bombeamento ótico por laser sobre átomos de sódio, envolvendo um sistema de três níveis, com dois níveis fundamentais e um nível excitado. Nesse experimento, devido à presença de um campo magnético inhomogêneo aplicado ao longo da célula de sódio, a não absorção foi produzida só numa pequena região no interior da célula e o fenômeno apareceu como uma linha escura no interior da fluorescência. Isto levou a usar nomes como *ressonância escura* ou *ressonância de não absorção* para descrever o aprisionamento coerente de população.

Na mesma época Whitley e Stroud [25], independentemente do trabalho da Ref.[24], apresentaram uma investigação teórica do bombeamento e aprisionamento causado por dois campos ressonantes com duas transições acopladas num sistema de três níveis em cascata e Gray e colaboradores [26], demonstraram os mesmos fenômenos experimentalmente usando, novamente, átomos de sódio com dois níveis fundamentais e um nível excitado. A análise teórica do fenômeno, apresentada por Arimondo e Orriols [27] e na Ref.[25] (o termo *aprisionamento coerente* é usado pela primeira vez), apontaram que os átomos de sódio foram bombeados num estado de não-absorção devido à presença de processos de interferência. A designação completa de *aprisionamento coerente de população* apareceu, pela primeira vez, no *abstract* de um artigo de

Agrawal [28] sobre a possibilidade de utilizar um sistema de três níveis para bi-estabilidade ótica.

Nos primeiros anos da década de 80 os trabalhos sobre aprisionamento coerente de população foram destinados às aplicações experimentais. Como primeira aplicação, em metrologia, apareceu o trabalho de Tench e colaboradores [29] e Thomas e colaboradores [30], que demonstraram a elevada precisão com que poderia ser medida a frequência de separação dos estados hiperfinos do estado fundamental do sódio, através do que eles chamaram *de franjas de Ramsey em transições Raman de três níveis*. A outra aplicação foi a bi-estabilidade ótica: em 1980 Walls e Zoller [31] investigaram, teoricamente, a bi-estabilidade ótica de átomos de três níveis no interior de uma cavidade. Esta bi-estabilidade foi observada, pela primeira vez, por Mlynek e colaboradores [32] em 1982. Após estas primeiras aplicações, o fenômeno de aprisionamento coerente de população tem sido explorado em diferentes aplicações: espectroscopia de alta resolução, mistura de quatro ondas e estruturas induzidas por laser no contínuo [1]. Considerável atenção sobre este fenômeno deve-se ao trabalho de Aspect e colaboradores [33] pela aplicação de aprisionamento coerente de população seletivo em velocidade ao resfriamento de átomos por laser.

O fenômeno de aprisionamento coerente de população tem sido examinado em vários artigos de revisão. Uma primeira revisão foi apresentada por Dalton e Knight [34] em 1983. Em 1985, Yoo e Eberly [35] apresentaram uma análise das características teóricas mais importantes do fenômeno, embora a sua atenção foi centrada nos átomos de três níveis no interior de uma cavidade ótica. Em 1987, Arimondo [36] apresentou um resumo dos principais resultados experimentais até esse momento. Outra revisão, com maior ênfase nos aspectos teóricos e a extensão ao resfriamento por laser, foi apresentada por Agap'ev e colaboradores [37] em 1993. Por último, uma excelente revisão deste fenômeno pode ser encontrada em Arimondo [1].

## 3.3 Discussão do fenômeno

### 3.3.1 Matriz densidade

A fim de ilustrar o fenômeno de aprisionamento coerente de população, suponhamos um sistema atômico com três níveis (níveis fundamentais  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  e nível excitado  $|0\rangle$ ) na configuração  $\Lambda^1$ , mostrada na Fig.3.1. O Hamiltoniano  $\mathcal{H}_0$  que descreve a energia interna destes átomos em ausência de qualquer radiação se escreve como:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_j E_j |j\rangle \langle j|, \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>Além da configuração  $\Lambda$  existem as configurações em cascata e em V.

onde  $E_j$  (com  $j = 0, 1, 2$ ) é a energia do  $j$ -ésimo nível.

O nível excitado  $|0\rangle$  (comum) é acoplado aos níveis  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  através de transições de dipolo elétrico induzidas pela interação com os campos clássicos  $E_1(z, t)$  e  $E_2(z, t)$ , respectivamente, e representados pelas seguintes expressões:

$$\vec{E}_1(z, t) = \vec{e}_1 \mathcal{E}_{L1}(z) \cos(\omega_{L1}t + \varphi_1) , \quad (3.2)$$

$$\vec{E}_2(z, t) = \vec{e}_2 \mathcal{E}_{L2}(z) \cos(\omega_{L2}t + \varphi_2) , \quad (3.3)$$

onde  $\mathcal{E}_{Lj}$ ,  $\vec{e}_j$ ,  $\omega_{Lj}$  e  $\varphi_j$  (Com  $j = 1, 2$ ), são a amplitude, o vetor unitário de polarização, a frequência angular e a fase de cada campo, respectivamente.

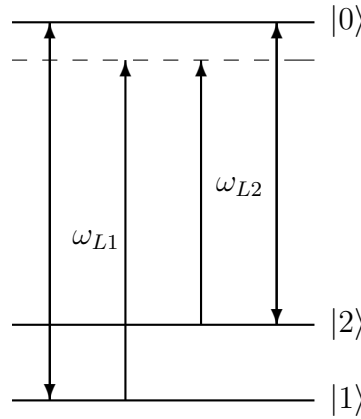


Figura 3.1: Sistema de três níveis na configuração  $\Lambda$ . Níveis  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  são acoplados ao nível  $|0\rangle$  por transições de dipolo elétrico.

Para facilitar a análise, vamos supor que os átomos estão em repouso ao longo da direção de propagação dos campos e na posição  $z$ . Também vamos assumir que cada campo atua só numa das transições atômicas, ou seja, o campo 1 atua na transição  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$  e o campo 2 na  $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$ . Além disso vamos definir as dessintonias  $\delta_{L1}$  e  $\delta_{L2}$  entre a frequência central de oscilação de cada campo e a transição atômica que ele acopla como:

$$\delta_{L1} = \omega_{L1} - \omega_{01} , \quad \delta_{L2} = \omega_{L2} - \omega_{02} , \quad (3.4)$$

com  $\omega_{0j}$  ( $j = 1, 2$ ) a frequência da transição entre os estados  $|0\rangle$  e  $|j\rangle$ , e a dessintonia Raman  $\delta_R$  da transição Raman de dois fótons:

$$\delta_R = \delta_{L1} - \delta_{L2} = (\omega_{L1} - \omega_{01}) - (\omega_{L2} - \omega_{02}) . \quad (3.5)$$



Incluindo os momentos de dipolo elétrico  $\mu_{01}$  e  $\mu_{02}$  entre os níveis correspondentes, as frequências de Rabi que caracterizam a interação entre os campos e os átomos são dadas pelas seguintes expressões:

$$\Omega_{R1} = -\frac{\mu_{01}\mathcal{E}_{L1}}{\hbar}, \quad \Omega_{R2} = -\frac{\mu_{02}\mathcal{E}_{L2}}{\hbar}, \quad (3.6)$$

onde, para facilitar os cálculos, em alguns casos as frequências de Rabi são tomadas reais, mas deveriam ser consideradas complexas no caso geral.

O Hamiltoniano de interação  $\mathcal{H}_{AL}$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{AL} = & \hbar \frac{\Omega_{R1}}{2} e^{-i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} |0\rangle\langle 1| + \hbar \frac{\Omega_{R1}^*}{2} e^{i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} |1\rangle\langle 0| + \\ & + \hbar \frac{\Omega_{R2}}{2} e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} |0\rangle\langle 2| + \hbar \frac{\Omega_{R2}^*}{2} e^{i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} |2\rangle\langle 0|, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde foi usada a conhecida aproximação da onda girante, RWA, (do inglês, *Rotating Wave Approximation*) para eliminar os termos não ressonantes do Hamiltoniano de interação. Os níveis  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  têm a mesma paridade, de modo que não há transição de dipolo elétrico entre eles, mas transições de dipolo magnético são possíveis.

Para finalizar a descrição do sistema de três níveis interagindo com dois campos, os termos de relaxação devido à emissão espontânea, colisões ou qualquer outro tipo de mecanismo de amortecimento devem ser considerados. Todos estes termos de relaxação da matriz densidade  $\rho(t)$  são introduzidos através de um operador  $\mathcal{R}$  na evolução da equação ótica de Bloch [1]:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar} \left[ \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{AL}, \rho(t) \right] + \mathcal{R}\rho(t). \quad (3.8)$$

No caso em consideração (átomos em configuração  $\Lambda$ ), só os seguintes termos de relaxação são distintos de zero:  $\Gamma_0$  a taxa total de decaimento da população do nível  $|0\rangle$ ;  $\Gamma_{0 \rightarrow 1} = \Gamma_{0 \rightarrow 2} = \Gamma_0/2$  a taxa de transferência de população do nível  $|0\rangle \rightarrow |j\rangle$  ( $j = 1, 2$ ) e  $\Gamma_{01} = \Gamma_{10} = \Gamma_{02} = \Gamma_{20} = \Gamma_0/2$  os termos que descrevem as taxas de decaimento dos elementos não diagonais da matriz densidade  $\rho_{ij}$ . Em presença de colisões, devemos incluir os seguintes processos de relaxação: taxas de decaimento  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$  para as coerências  $\rho_{12}$  e  $\rho_{21}$  entre os níveis fundamentais, taxas de transferência de populações  $\Gamma_{1 \rightarrow 2}$  e  $\Gamma_{2 \rightarrow 1}$  e taxas de perda das populações  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

Para um sistema  $\Lambda$ , os seguintes elementos da matriz densidade, do ponto de vista da interação, podem ser introduzidos, com o objetivo de escrever as

equações de evolução em termos de envoltentes atômicas lentamente variáveis:

$$\tilde{\rho}_{0i} = \rho_{0i} e^{i(\omega_{Li}t + \varphi_i)}, \quad (i = 1, 2), \quad (3.9)$$

$$\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} e^{-i[(\omega_{L1} - \omega_{L2})t + (\varphi_1 - \varphi_2)]}. \quad (3.10)$$

Assim, encontramos as seguintes equações de evolução para as envoltentes atômicas lentamente variáveis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{00} = -\Gamma_0 \rho_{00} + i \frac{\Omega_{R1}^*}{2} \tilde{\rho}_{01} + i \frac{\Omega_{R2}^*}{2} \tilde{\rho}_{02} - i \frac{\Omega_{R1}}{2} \tilde{\rho}_{10} - i \frac{\Omega_{R2}}{2} \tilde{\rho}_{20}, \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{11} = \frac{\Gamma_0}{2} \tilde{\rho}_{00} - (\Gamma_1 \tilde{\rho}_{11} - \Gamma_{2 \rightarrow 1} \tilde{\rho}_{22}) - i \frac{\Omega_{R1}^*}{2} \tilde{\rho}_{01} + i \frac{\Omega_{R1}}{2} \tilde{\rho}_{10}, \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{22} = \frac{\Gamma_0}{2} \tilde{\rho}_{00} - (\Gamma_2 \tilde{\rho}_{22} - \Gamma_{1 \rightarrow 2} \tilde{\rho}_{22}) - i \frac{\Omega_{R2}^*}{2} \tilde{\rho}_{02} + i \frac{\Omega_{R2}}{2} \tilde{\rho}_{20}, \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{01} = - \left( \frac{\Gamma_0}{2} + i\delta_{L1} \right) \tilde{\rho}_{01} + i \frac{\Omega_{R1}}{2} (\tilde{\rho}_{00} - \tilde{\rho}_{11}) - i \frac{\Omega_{R2}}{2} \tilde{\rho}_{21}, \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{02} = - \left( \frac{\Gamma_0}{2} + i\delta_{L2} \right) \tilde{\rho}_{02} + i \frac{\Omega_{R2}}{2} (\tilde{\rho}_{00} - \tilde{\rho}_{22}) - i \frac{\Omega_{R1}}{2} \tilde{\rho}_{21}^*, \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{12} = -(\Gamma_{12} + i\delta_R) \tilde{\rho}_{12} + i \frac{\Omega_{R1}}{2} \tilde{\rho}_{01}^* - i \frac{\Omega_{R2}^*}{2} \tilde{\rho}_{02}, \quad (3.16)$$

com  $\tilde{\rho}_{i0} = \tilde{\rho}_{0i}^*$ .

### 3.3.2 Resultados numéricos

Como indicado nas referências [26, 27] e [38], a forma mais simples de ver o aprisionamento coerente de população é através da solução numérica para os valores médios, no estado estacionário, das envoltentes atômicas lentamente variáveis.

A Fig.3.2 mostra resultados numéricos para o valor médio, no estado estacionário, da população  $\tilde{\rho}_{00}$  [curva (a)] e dos estados fundamentais  $\rho_{11}$  (vermelha) e  $\rho_{22}$  (azul), respectivamente, [curva (b)], num sistema  $\Lambda$ , com frequências de Rabi e taxas de relaxação próximas ao de uma situação experimental. Quando a condição de ressonância de dois fótons é satisfeita  $\delta_R = \delta_{L1} - \delta_{L2} \approx 0$ , um pico estreito peculiar aparece na população do nível excitado  $|0\rangle$ . Nessa figura, o campo 1 é fixado na ressonância  $\delta_{L1} = 0$  e a frequência do campo 2 é variada em torno de sua ressonância ótica. Como podemos ver, numa região próxima da ressonância Raman, observamos uma significativa diminuição da população do nível excitado  $|0\rangle$ , onde os átomos permanecem distribuídos nos

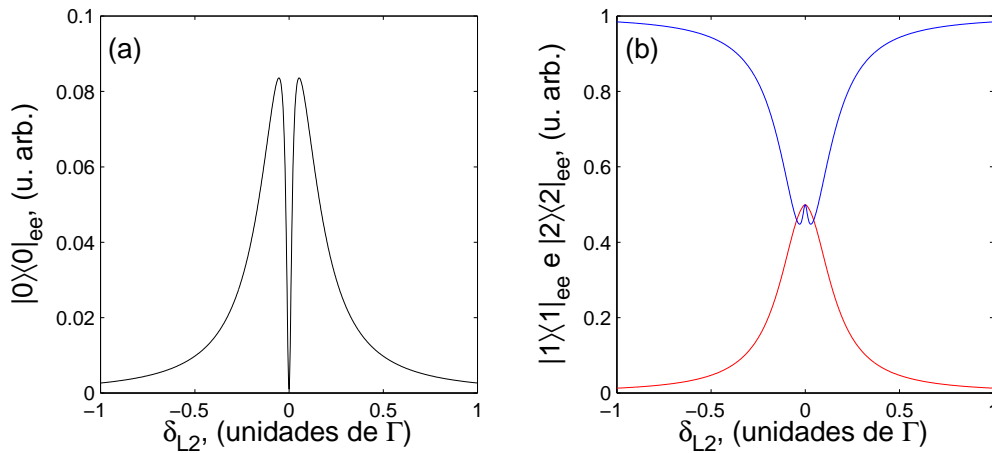


Figura 3.2: (a) População do estado excitado  $\rho_{00}$ , no estado estacionário, em função da dessintonia do feixe do campo 2  $\delta_{L2}$ , mostrando o típico comportamento de aprisionamento coerente de população. (b) Populações dos estados fundamentais  $\rho_{11}$  (vermelha) e  $\rho_{22}$  (azul), respectivamente.  $\Omega_{R1} = \Omega_{R2} = 0, 2\Gamma_0, \Gamma_{12} = 0, 001\Gamma_0, \delta_{L1} = 0$ .

níveis fundamentais  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , respectivamente; a população do sistema  $\Lambda$  é aprisionada nos níveis inferiores.

Outra forma de observar a estreita ressonância produzida pelo aprisionamento coerente de população é através do coeficiente de absorção  $\alpha$  ou do índice de refração  $n$  para cada um dos campos agindo sobre o sistema. Estas grandezas  $\alpha$  e  $n$  são derivadas a partir das partes imaginária e real da susceptibilidade  $\chi''$  e  $\chi'$ , respectivamente, as quais ligam a polarização  $P$  aos campos elétricos aplicados [13]. A polarização complexa de  $N$  átomos associada às transições  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  e  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$  é dada por:

$$\mathcal{P} = N(\mu_{01}\rho_{01} + \mu_{02}\rho_{02}) + c.c. \quad (3.17)$$

As componentes de Fourier para as frequências  $\omega_{Lj}$  ( $j = 1, 2$ ) são dadas por:

$$\mathcal{P}(z, \omega_{Lj}) = \varepsilon_0 \left( \chi'(\omega_{Lj}) + i\chi''(\omega_{Lj}) \right) \mathcal{E}_{Lj}(z). \quad (3.18)$$

Das equações anteriores chegamos a:

$$\chi'(\omega_{Lj}) = \frac{N}{\varepsilon_0 \mathcal{E}_{Lj}} \left( \mu_{0i}\rho_{0j} + c.c. \right), \quad (3.19)$$

$$\chi''(\omega_{Lj}) = \frac{N}{i\varepsilon_0 \mathcal{E}_{Lj}} \left( \mu_{0j}\rho_{0j} - c.c. \right), \quad (3.20)$$

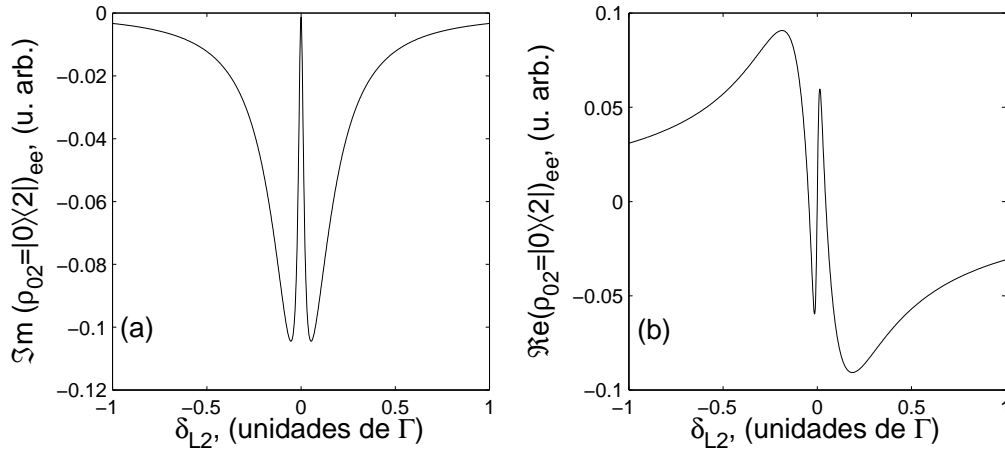


Figura 3.3: Parte imaginária [absorção (a)] e parte real [índice de refração (b)] da coerência ótica da transição  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ ,  $\Im m(\rho_{02} = |0\rangle\langle 2|)$  e  $\Re e(\rho_{02} = |0\rangle\langle 2|)$ , respectivamente, em função da dessintonia do feixe do campo 2  $\delta_{L2}$  e no estado estacionário.

A dependência das partes real e imaginária das coerências óticas  $\rho_{0j}$  com as frequências dos campos determina o comportamento do índice de refração e do coeficiente de absorção do meio na ressonância do aprisionamento coerente de população. A Fig.3.3 mostra os valores médios, no estado estacionário, da parte imaginária [curva (a)] e da parte real [curva (b)] de  $\rho_{02}$ , respectivamente. A parte imaginária, que determina o coeficiente de absorção  $\alpha$ , apresenta um comportamento similar ao da população do nível excitado  $\rho_{00}$  (aumento nas vizinhanças da ressonância ótica com uma largura de linha que depende da emissão espontânea e do alargamento por potência) e uma estreita diminuição da absorção na região central, próxima à condição de ressonância Raman. Por outro lado, a parte real de  $\rho_{02}$ , que determina a parte dispersiva do índice de refração  $n$ , apresenta duas curvas de dispersão; a maior delas, com largura de linha dada pela emissão espontânea e o alargamento por potência, e a menor, e invertida, devido ao aprisionamento coerente de população em torno da ressonância Raman.

### 3.3.3 Estados acoplados e não-acoplados

Para entendermos o processo de aprisionamento coerente de população CPT é útil uma transformação unitária. Considerando, para simplificação dos cálculos, que os níveis fundamentais  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  são degenerados e os dois campos têm a mesma frequência  $\omega_L$  e a mesma fase  $\varphi_L$ , vamos escrever as seguintes combinações lineares e ortogonais entre os estados fundamentais na configuração

$\Lambda$ :

$$|\text{NC}\rangle = \frac{\Omega_{R2}}{\sqrt{|\Omega_{R1}|^2 + |\Omega_{R2}|^2}}|1\rangle - \frac{\Omega_{R1}}{\sqrt{|\Omega_{R1}|^2 + |\Omega_{R2}|^2}}|2\rangle, \quad (3.21)$$

$$|\text{C}\rangle = \frac{\Omega_{R1}^*}{\sqrt{|\Omega_{R1}|^2 + |\Omega_{R2}|^2}}|1\rangle + \frac{\Omega_{R2}^*}{\sqrt{|\Omega_{R1}|^2 + |\Omega_{R2}|^2}}|2\rangle, \quad (3.22)$$

os quais definem os estados não-acoplados  $|\text{NC}\rangle$  e acoplados  $|\text{C}\rangle$ , respectivamente. Em função do Hamiltoniano de interação átomos-campos, Eq.(3.7), o elemento de matriz entre os estados  $|\text{NC}\rangle$  e  $|0\rangle$  é nulo:

$$\langle 0|\mathcal{H}_{Al}|\text{NC}\rangle = 0 \quad (3.23)$$

e, entre os estados  $|\text{C}\rangle$  e  $|0\rangle$ , é dado pela seguinte expressão:

$$\langle 0|\mathcal{H}_{Al}|\text{C}\rangle = \frac{\hbar}{2}\sqrt{|\Omega_{R1}|^2 + |\Omega_{R2}|^2} e^{-i(\omega_L t + \varphi_L)}. \quad (3.24)$$

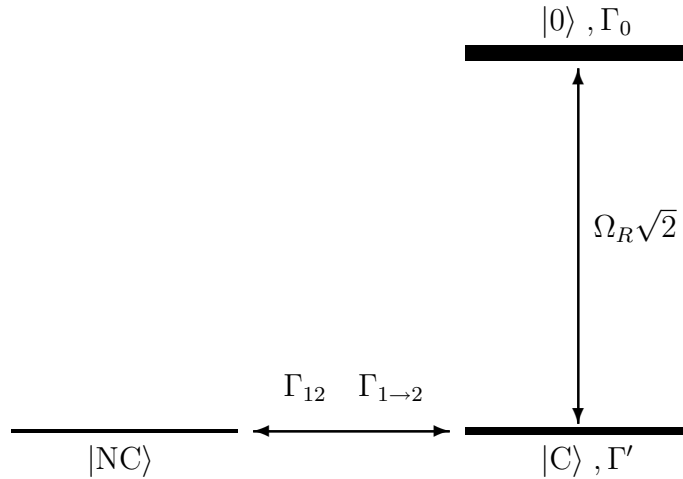


Figura 3.4: Acoplamentos e taxas de perda efetivas para os estados  $|0\rangle$ ,  $|\text{NC}\rangle$  e  $|\text{C}\rangle$ . O estado  $|\text{C}\rangle$  é acoplado ao estado  $|0\rangle$  pela interação com os campos, com elementos de matriz  $\Omega_R\sqrt{2}$ ; como resultado deste acoplamento, o estado  $|\text{C}\rangle$  ganha uma taxa de perda  $\Gamma'$ . Os estados  $|\text{NC}\rangle$  e  $|\text{C}\rangle$  são acoplados através das taxas de relaxação dos níveis fundamentais.

Conseqüentemente, um átomo no estado não-acoplado  $|\text{NC}\rangle$  não absorve fótons, de modo que não é excitado ao nível  $|0\rangle$ . Assim, para um átomo preparado no estado  $|\text{NC}\rangle$ , a equação de Schrödinger sob a ação do Hamiltoniano  $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{AL}$  resulta em:

$$\frac{d}{dt}|\text{NC}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{AL}\right)|\text{NC}\rangle = 0. \quad (3.25)$$

Ou seja, um átomo preparado no estado  $|NC\rangle$  permanece nesse estado e não pode abandoná-lo nem por evolução livre (efeito do Hamiltoniano  $\mathcal{H}_0$ ) nem pela absorção de fótons dos campos (efeito do Hamiltoniano  $\mathcal{H}_{AL}$ ). Mais ainda, dado que esse estado é uma combinação linear dos estados fundamentais radiativamente estáveis, o átomo não pode abandonar esse estado pela emissão espontânea.

Os vários acoplamentos entre os estados  $|C\rangle$ ,  $|NC\rangle$  e  $|0\rangle$ , pela ação dos Hamiltonianos  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_{AL}$ , estão representados na Fig.3.4. O estado acoplado  $|C\rangle$  e o estado excitado  $|0\rangle$  são acoplados pelo Hamiltoniano de interação átomos-campos com frequência de Rabi  $\sqrt{|\Omega_{R1}|^2 + |\Omega_{R2}|^2}$ . O estado excitado  $|0\rangle$  tem uma taxa de perda efetiva  $\Gamma_0$  determinada pela emissão espontânea. No caso de uma excitação ressonante  $\delta_{L1} = \delta_{L2} = \varphi$  e no limite de intensidades fracas  $\sqrt{|\Omega_{R1}|^2 + |\Omega_{R2}|^2} \leq \Gamma_0$ , o acoplamento de Rabi entre os estados  $|C\rangle$  e  $|0\rangle$  dão ao estado acoplado  $|C\rangle$  uma taxa efetiva de perda dada por:

$$\frac{d}{dt}\rho_{CC} = -2\Gamma'\rho_{CC} = -\frac{\sqrt{|\Omega_{R1}|^2 + |\Omega_{R2}|^2}}{\Gamma_0}\rho_{CC}. \quad (3.26)$$

A preparação de um sistema de três níveis nos estados acoplados/não-acoplados implica na formação de uma coerência entre os níveis  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , a qual pode ser obtida a partir das relações dos elementos da matriz densidade entre ambas as bases:

$$\rho_{CC} = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{R1}|^2 + |\Omega_{R2}|^2}} \left( |\Omega_{R1}|^2 \tilde{\rho}_{11} + |\Omega_{R2}|^2 \tilde{\rho}_{22} + \Omega_{R1}\Omega_{R2}^* \tilde{\rho}_{12} + \Omega_{R1}^*\Omega_{R2} \tilde{\rho}_{12}^* \right). \quad (3.27)$$

$$\rho_{NCNC} = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{R1}|^2 + |\Omega_{R2}|^2}} \left( |\Omega_{R1}|^2 \tilde{\rho}_{11} + |\Omega_{R2}|^2 \tilde{\rho}_{22} - \Omega_{R1}\Omega_{R2}^* \tilde{\rho}_{12} - \Omega_{R1}^*\Omega_{R2} \tilde{\rho}_{12}^* \right). \quad (3.28)$$

### 3.3.4 Estados vestidos

Se a partir do Hamiltoniano  $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{AL}$  pode-se obter uma matriz independente do tempo, então podem-se obter estados vestidos. Ainda que a descrição em termos dos estados vestidos não contenha a influência de processos dissipativos, permite um bom entendimento do fenômeno de aprisionamento coerente de população.

No campo da teoria semi-clássica, uma transformação unitária permite derivar um Hamiltoniano independente do tempo para um sistema de três níveis

na configuração  $\Lambda$  [39, 40]. No campo da teoria quântica, a quantização dos campos tem sido aplicada a sistemas de três níveis por Cohen-Tannoudji e Reynaud [41], Radmore e Knight [42], Swain [43] e Dalibard e colaboradores [44].

Quando os campos eletromagnéticos são tratados quanticamente, os estados são designados através do número quântico atômico  $j = 0, 1, 2$  e o número dos fótons dos campos:  $n_1$  para o campo 1 e  $n_2$  para o campo 2. Para este caso, o Hamiltoniano é descrito pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \hbar\omega_{R1}a_{R1}^\dagger a_{R1} + \hbar\omega_{R2}a_{R2}^\dagger a_{R2} + E_0|0\rangle\langle 0| + E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| + \\ & + \hbar g_{R1} \left( a_{R1}|1\rangle\langle 0| + a_{R1}^\dagger|0\rangle\langle 1| \right) + \\ & + \hbar g_{R2} \left( a_{R2}|2\rangle\langle 0| + a_{R2}^\dagger|0\rangle\langle 2| \right), \end{aligned} \quad (3.29)$$

com os modos dos campos às frequências  $\omega_{R1}$  ( $\omega_{R2}$ ) caracterizados pelos operadores de aniquilação e de criação  $a_{R1}$  e  $a_{R1}^\dagger$  ( $a_{R2}$  e  $a_{R2}^\dagger$ ), respectivamente. Para campos com números de fótons  $n_1$  e  $n_2$  grandes, as constantes de acoplamento  $g_{R1}$  e  $g_{R2}$  do Hamiltoniano de interação dão elementos de matriz equivalentes aos da Eq.(3.7):

$$g_{R1}\langle n_1|a_{R1}|n_1 + 1\rangle = \frac{\Omega_{R1}}{2}, \quad (3.30)$$

$$g_{R2}\langle n_2|a_{R2}|n_2 + 1\rangle = \frac{\Omega_{R2}}{2}. \quad (3.31)$$

Os elementos de matriz anteriores definem uma família fechada  $\mathcal{F}(n_1, n_2)$  cujos estados são acoplados por processos de absorção e de emissão estimuladas:

$$|1, n_1 + 1, n_2\rangle, \quad |0, n_1, n_2\rangle, \quad |2, n_1, n_2 + 1\rangle. \quad (3.32)$$

Auto-estados do Hamiltoniano quantizado dos estados vestidos são combinações lineares desses estados. Expressões simples podem ser derivadas para certos casos relevantes. Na ressonância Raman e na ressonância dos campos  $\delta_R = \delta_{L1} = \delta_{L2} = 0$ , com  $\Omega_{R1} = \Omega_{R2} = \Omega_R$ , os auto-estados de uma família  $\mathcal{F}(n_1, n_2)$  são dados, segundo a Ref.[41], pelas seguintes expressões:

$$|\text{NC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1, n_1 + 1, n_2\rangle - |2, n_1, n_2 + 1\rangle \right), \quad (3.33)$$

$$|s\rangle = \frac{1}{2} \left( |1, n_1 + 1, n_2\rangle + |2, n_1, n_2 + 1\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} |0, n_1, n_2\rangle, \quad (3.34)$$

$$|t\rangle = -\frac{1}{2} \left( |1, n_1 + 1, n_2\rangle + |2, n_1, n_2 + 1\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} |0, n_1, n_2\rangle, \quad (3.35)$$

com auto-energias:

$$E_s = -\hbar \frac{\Omega_R}{\sqrt{2}}, \quad E_{\text{NC}} = 0, \quad E_t = \hbar \frac{\Omega_R}{\sqrt{2}}. \quad (3.36)$$

O estado vestido  $|\text{NC}\rangle$  da Eq.(3.33), correspondente ao estado semi-clássico definido pela Eq.(3.21), apresenta uma interferência similar no processo de absorção. A expressão central da Eq.(3.36) mostra que o estado não-acoplado não tem a sua energia perturbada, sendo que os outros estados apresentam um deslocamento de energia proporcional à frequência de Rabi. A equidistância dos estados  $|s\rangle$  e  $|t\rangle$  com relação ao estado  $|\text{NC}\rangle$  deve-se à aproximação de ressonância de um e dois fótons. Os processos de emissão espontânea produzem um salto desde os estados  $|s\rangle$  e  $|t\rangle$  de uma dada família  $\mathcal{F}(n_1, n_2)$  a uma de menor energia,  $\mathcal{F}(n_1 - 1, n_2)$  ou  $\mathcal{F}(n_1, n_2 - 1)$  [45]. Se o estado  $|\text{NC}\rangle$  é alcançado após o processo de emissão espontânea, a evolução temporal pára, porque esse estado é estável sob a influência da absorção dos campos e da emissão espontânea.

### 3.4 Transparência induzida por laser

Na seção anterior revisamos algumas das características do fenômeno de aprisionamento coerente de população, CPT, para um sistema atômico de três níveis na configuração  $\Lambda$ , no qual os estados fundamentais são preparados em superposições lineares coerentes que dão origem aos estados acoplados  $|C\rangle$  e não acoplados  $|\text{NC}\rangle$ .

Um fenômeno estreitamente relacionado ao anterior é o da transparência induzida eletromagneticamente, EIT (tambem conhecido como Transparência Induzida por Laser ). Este fenômeno<sup>2</sup> foi reportado em 1988 por Kocharovskaya e Khannin [46] e, independentemente, por Harris [47] em 1989. O nome EIT foi reportado por Harris e colaboradores [48] em 1990, no qual a interferência quântica é introduzida pela interação de um campo coerente intenso (campo de bombeio ou de acoplamento) que acopla um dos níveis inferiores ao nível superior do sistema de três níveis. Sob condições apropriadas, o meio torna-se efetivamente transparente (absorção nula) para um campo de prova (sonda), ressonante ou próximo da ressonância com a outra transição permitida.

A interpretação física do fenômeno de transparência induzida pode ser perfeitamente entendida em termos dos estados acoplados  $|C\rangle$  e não-acoplados  $|\text{NC}\rangle$  da Sec.3.3.3. Um dos possíveis mecanismos de bombeamento dos átomos ao estado não-acoplado é o de bombeamento ótico ordinário que leva os átomos

---

<sup>2</sup>É comum na literatura atribuir aos artigos de Harris o começo da EIT.



ao estado escuro. Para este caso, a transparência eletromagnética é induzida nos átomos em um tempo da ordem do tempo de vida do estado excitado, tempo que o átomo no estado excitado leva para decair ao estado não-acoplado.

A maioria dos trabalhos experimentais e teóricos em transparência induzida eletromagneticamente em vapores atômicos [49, 50, 51] são realizados em condições experimentais tais que o feixe do campo sonda tem uma intensidade fraca em comparação à intensidade do feixe do campo de bombeio e à intensidade de saturação da transição ao qual está acoplado.

Em 1999, baseados no efeito de interferência quântica (propagação da luz através de um meio atômico que, de outra forma, seria opaco) responsável pela transparência induzida eletromagneticamente Hau [52], Kash[53] e Budker e colaboradores [54] comprimiram pulsos de luz até sete ordens de magnitude, resultando na sua completa localização no interior de uma nuvem atômica, como mostrado na Ref. [52].

Em janeiro de 2001, Chien e colaboradores [55], usando o mesmo fenômeno de EIT, reduziram a velocidade de pulsos de luz no interior de uma nuvem de átomos de sódio resfriados e aprisionados magneticamente. Na região de localização dos pulsos, os átomos se encontram numa superposição de estados determinada pelas amplitudes e as fases dos campos de acoplamento e de prova. Após desligar repentinamente o campo de acoplamento, o pulso do campo de prova foi “detido”; a informação coerente contida inicialmente nos campos dos lasers foi “congelada” (armazenada) no meio atômico pelo menos até 1 *ms*. Passado um certo tempo, o laser de acoplamento foi novamente ligado e o feixe do campo de prova foi regenerado: a coerência armazenada foi “lida” e transferida ao campo. Além disso, os autores do artigo apresentaram um modelo teórico onde mostram que o sistema é auto-ajustado de modo a minimizar as perdas dissipativas durante as operações de “leitura” e “escrita”. Por último, anteciparam a aplicação desse fenômeno para processamento de informação quântica.

Após alguns dias da publicação do artigo da Ref. [55] apareceu outro artigo reportando um trabalho experimental [56] onde um pulso de luz foi efetivamente desacelerado, armazenado por um tempo controlado e logo liberado, desta vez usando um vapor de átomos de *Rb*. O “armazenamento da luz” foi levado a cabo reduzindo dinamicamente a velocidade de grupo de um pulso de luz até zero, de modo que a excitação coerente da luz é mapeada reversivelmente na coerência Zeeman (spin) do vapor de *Rb*.

Um excelente artigo onde são revisadas as idéias de controle de fótons usando transparência induzida eletromagneticamente foi escrito por Lukin e Imamoğlu [57]. Nesse artigo os autores apresentam uma descrição do fenômeno de EIT, as propriedades da propagação da luz nesses meios, as propriedades óticas não-lineares baseadas na transparência induzida eletromagneticamente e a possibilidade de usar esse fenômeno em informação quântica. Um comentário sobre o artigo da Ref.[57], foi apresentado por Cornel [58], no mesmo ano.

Por outro lado, os primeiros trabalhos teóricos destinados ao estudo das flutuações dos campos responsáveis pela EIT foram realizados por Agarwal [59] e Jain[60] (extensão do trabalho de Agarwal). Agarwal investigou as propriedades estatísticas de dois campos quânticos gerados por átomos de três níveis em configuração  $\Lambda$  e na situação de aprisionamento coerente de população. Nesse trabalho prevê-se a existência de uma estatística de fótons acoplada entre os campos quânticos. Além dos campos quânticos, existem dois campos clássicos, com flutuações nulas envolvidos no tratamento. Estes campos clássicos, independentes dos campos quânticos, são os responsáveis pelo estado estacionário correspondente à condição de aprisionamento coerente de população. Além disso, afirma-se que a estatística dos campos quânticos só é alterada quando as dessintonias deles são iguais, mesmo sendo diferentes à da ressonância.

Para finalizar, da abundante literatura sobre transparência induzida eletromagneticamente, a maioria dos trabalhos experimentais tem adotado como objetivo o estudo da modificação das propriedades, absorptivas e dispersivas, do meio atômico, o que geralmente é feito analisando a intensidade média do campo de prova após a interação com os átomos. A primeira investigação experimental (para nosso conhecimento) das flutuações dos campos e das correlações em EIT foram apresentadas pelo nosso grupo no trabalho de Garrido e colaboradores [3] em 2003. Nesse trabalho reportamos a existência de uma estatística super-Poissoniana em ambos os campos, na ressonância da EIT, bem como a correlação de intensidade entre os campos, inicialmente independentes, como resultado da sua interação com os átomos.

### 3.5 Comentários finais

Neste capítulo descrevemos qualitativamente os fenômenos de aprisionamento coerente de população e de transparência induzida eletromagneticamente. Esta interpretação foi apresentada em termos dos valores médios, no estado estacionário, das populações atômicas, bem como das partes imaginária e real da coerência ótica  $\tilde{\rho}_{02}$ , acoplada ao feixe sonda. Segundo o resultado numérico da parte imaginária da coerência  $\tilde{\rho}_{02}$ , a EIT é caracterizada pela diminuição da absorção na condição de ressonância Raman. Ou seja, se tivéssemos analisado a intensidade média do campo sonda após interagir com os átomos, e é o que geralmente se faz, observaríamos um aumento da intensidade do mesmo feixe, exatamente onde a coerência apresenta a mínima absorção.

O dito acima mostra claramente que, no estado estacionário e na condição de transparência induzida, os campos modificam as propriedades absorptivas e dispersivas dos átomos, tornando-os transparentes quando deveriam, em condições normais, serem opacos. Isto nos leva às seguintes perguntas: Que acontece, nessas condições, com as propriedades estatísticas dos campos? Se as propriedades estatísticas dos campos são modificadas pela sua interação

com os átomos, podem essas modificações ser desprezadas, como no caso do feixe de bombeio que, a maioria dos autores sugere? Considerando campos inicialmente independentes - não correlacionados em intensidade nem em fase - a modificação das propriedades dos mesmos, por parte dos átomos e na EIT, os leva a ficar correlacionados, anti-correlacionados ou, eles continuam não correlacionados?

As respostas a essas perguntas serão encontradas, à luz dos resultados experimentais deste trabalho, no próximo capítulo.



# Capítulo 4

## Resultados experimentais

### 4.1 Introdução

O fenômeno de transparência induzida eletromagneticamente, EIT, pode ser entendido com base na explicação qualitativa do aprisionamento coerente de população, CPT, apresentada no capítulo anterior. Assim, em termos dos estados acoplados  $|C\rangle$  e não-acoplados  $|NC\rangle$  da Sec.3.3.3, a EIT pode ser entendida como o bombeamento ótico dos átomos ao estado não-acoplado, i.e., bombeamento ótico ordinário que leva os átomos ao estado escuro, num tempo da ordem do tempo de vida do estado excitado.

Diferentemente da maioria dos trabalhos em EIT, em 2003, nós reportamos as primeira medidas experimentais do ruído de intensidade dos campos em EIT [3]. Nesse trabalho mostramos a existência de uma estatística super-Poissoniana em ambos campos, na ressonância da EIT, bem como a correlação de intensidade entre os feixes, inicialmente independentes. Esse estudo, no entanto, foi feito em uma única frequência de análise e uns poucos valores de intensidade dos feixes de bombeio e sonda. Com base nisso, aprofundamos nossa análise experimental através de um melhor controle dos parâmetros do sistema. Dentre outros, estabilizamos ativamente as frequências de nossos lasers com cavidade estendida, montamos uma célula de vapor de Rb auxiliar como referência permanente para o sinal DC da EIT, montamos cavidades de análise para o estudo do ruído das quadraturas dos feixes e sistematizamos a aquisição dos dados. A descrição detalhada dessas melhoras, bem como os novos resultados experimentais no estudo do ruído dos feixes de bombeio e sonda, e das correlações, na transparência induzida, é o objetivo deste capítulo.

## 4.2 Dispositivos, técnicas e medidas de calibração

O estudo experimental do ruído de intensidade - proporcional ao ruído da quadratura amplitude - e de fase dos campos de bombeio e sonda, bem como o das correlações entre eles, na transparência induzida eletromagneticamente, EIT, foi realizado com um vapor de  $^{85}\text{Rb}$  contido em uma célula de vidro a temperatura ambiente. O rubídio contido na célula é, na realidade, uma mistura dos isótopos  $^{85}\text{Rb}$  (82,2%) e  $^{87}\text{Rb}$  (27,8%). Os campos são feixes de luz gerados por diodos laser Sanyo LD0785-0080-1, com potência de saída máxima de  $\approx 80 \text{ mW}$ , com cavidade estendida e estabilizados em corrente e temperatura. Para uma descrição detalhada da montagem e da estabilização destes diodos, bem como da técnica de absorção saturada, utilizada como referência em frequência, o leitor pode consultar a Ref.[54, 61, 62, 63, 64].

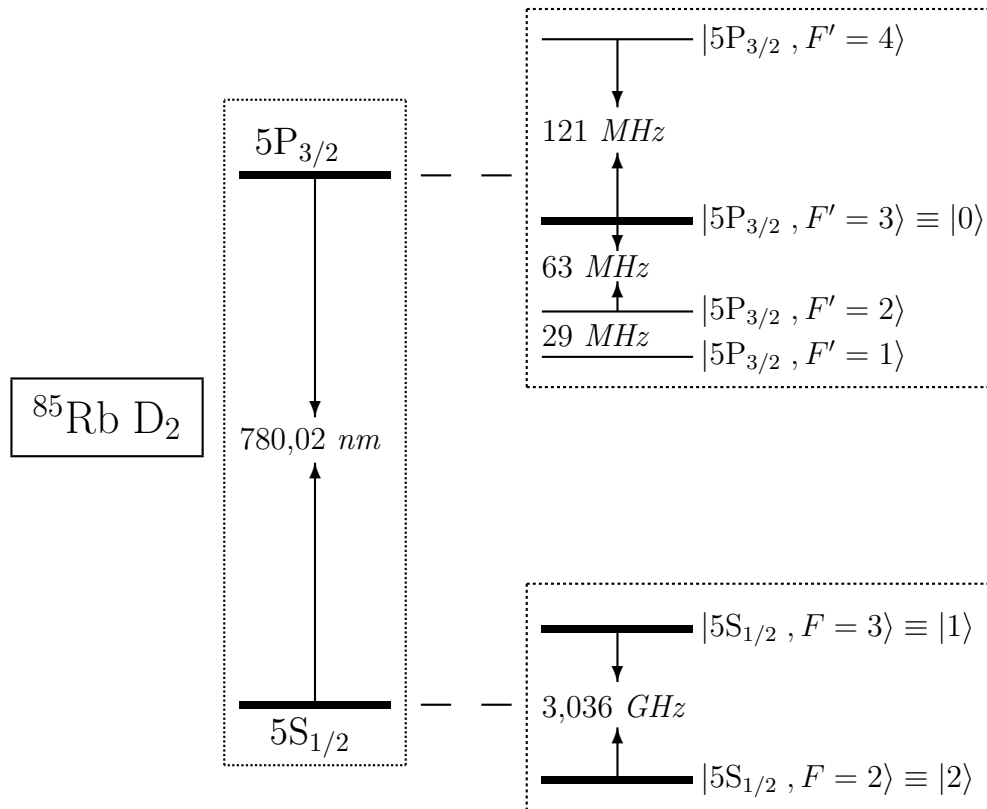


Figura 4.1: Níveis de energia da transição  $D_2$  do  $^{85}\text{Rb}$  de  $\lambda = 780,02 \text{ nm}$  de comprimento de onda. O valor em  $\text{MHz}$  indica a separação em frequência entre os diferentes níveis de momento angular total  $F$ .

A escolha do  $^{85}\text{Rb}$ , como meio atômico para o estudo do ruído dos feixes de bombeio e sonda, na transparência induzida, se deve, por um lado, à dis-

ponibilidade desse material comercialmente, e por outro lado, à existência no mercado de diodos lasers que emitem luz cujo comprimento de onda está na faixa dos 780 *nm*, o que possibilita o estudo experimental sobre esse isótopo do rubídio.

Os feixes de bombeio e sonda foram escolhidos segundo a configuração do diagrama de energia dos níveis associados à linha espectral ou transição ótica  $D_2$  [65], para o isótopo  $^{85}\text{Rb}$ , apresentada na Fig.4.1.

### 4.2.1 Detecção balanceada

Para medir o ruído de intensidade dos campos de bombeio e sonda e as correlações entre os mesmos utilizamos o sistema de detecção balanceada<sup>1</sup>, sendo a Fig.(2.2) um desenho esquemático do mesmo.

Geralmente, o esquema de detecção homodina usa um divisor de feixe 50/50, no entanto para fins práticos esse divisor de feixe é substituído por um cubo divisor de feixe polarizador ( $\text{PBS}_1$ : Polarizing Beam Splitter)[ver Fig.2.2] e uma lâmina de meia onda ( $\lambda/2$ ). Com estas mudanças, o feixe do laser linearmente polarizado é dividido de modo a obter, após o cubo, dois feixes com intensidades muito próximas entre si. Isto consegue-se, simplesmente, girando a lâmina  $\lambda/2$ . Desta forma, pode-se corrigir qualquer diferença entre as intensidades dos feixes detetados.

A detecção dos feixes foi feita com detectores de silício modelo FND-100 fabricados por EG&G, que podem ser alimentados com tensões de 15 *V* ou 70 *V*. A eficiência quântica de conversão desses detectores é  $\geq 85\%$ , com uma largura de banda de 350 *MHz* e uma capacitância interna que varia entre 8 e 10 *pF*.

A corrente gerada pelos feixes ao incidir nos fotodetetores é amplificada em duas etapas independentes. Uma parte destina-se a amplificar a componente de corrente contínua da fotocorrente, a outra destina-se a amplificar a componente de alta-freqüência da mesma fotocorrente. A saída de alta freqüência HF (HF: high frequency) do amplificador correspondente é conectada na entrada de um misturador e a saída de corrente contínua, ou nível DC (DC: direct current), é usada para determinar o valor médio da fotocorrente e balancear as intensidades dos feixes.

Para determinar o shot noise das nossas medidas subtraímos as fotocorrentes dos detetores. Por outro lado, a medida do ruído de intensidade dos feixes detetados é feita somando tais fotocorrentes. Para fazer estes dois tipos de medidas contamos com a ajuda de um circuito misturador ou circuito de soma/diferença, representado por  $(\pm)$  na Fig.2.2.

---

<sup>1</sup>O desenvolvimento teórico foi apresentado na Sec.2.5.1.

### 4.2.2 Calibração da medida do shot noise

Para evitarmos realizar as medidas do shot noise cada vez que fazíamos uma medida da correlação entre o ruído dos feixes de bombeio e sonda foi conveniente calibrar os detetores, de modo tal que o valor desse ruído podia ser inferido diretamente do valor do nível DC dos detetores. Isto nos permitia saber qual o intervalo de intensidades em que deveríamos trabalhar. Se por um lado, intensidades muito baixas dariam um shot noise similar ao ruído eletrônico, por outro lado, intensidades muito altas causariam a saturação dos detetores.

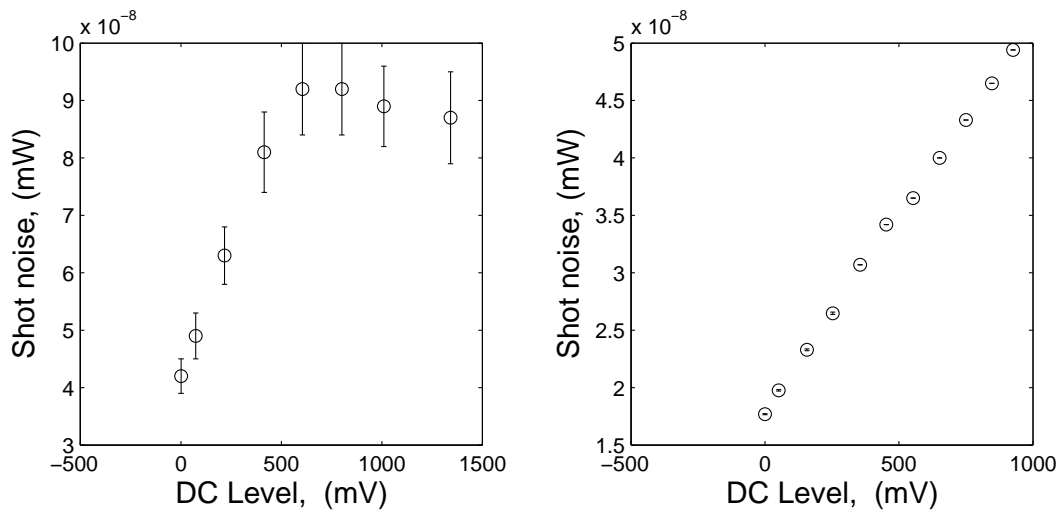


Figura 4.2: Curvas de calibração da medida do shot noise em função da tensão (DC Level) em um dos detetores. O zero de ambas curvas corresponde à tensão do detector com o sinal do ruído eletrônico.

A Fig.4.2 mostra as curvas de calibração do shot noise em função da tensão em um dos detetores. A curva da esquerda é o sinal de calibração com os detetores alimentados com uma tensão de 15 V, para uma frequência de análise de 10 MHz, e a curva da direita com 70 V, para uma frequência de análise de 2 MHz. Para obtermos estes sinais, um único feixe é enviado a um esquema de detecção balanceada. Um filtro de densidade neutra, variável, permite-nos aumentar ou diminuir a intensidade do feixe antes da detecção balanceada. O sinal do misturador é enviado ao Analisador de Espectros. Uma vez escolhida a frequência de análise e adquirido o sinal do ruído eletrônico para essa frequência, o sinal de ruído da diferença é adquirido variando a intensidade do feixe. A intensidade do feixe que chega a cada detector é inferida a partir do valor DC médio do mesmo, que é adquirido num Osciloscópio.

Das curvas da Fig.(4.2) vemos que, com os detetores alimentados com tensão de 70 V, o comportamento do shot noise é linear em todo o inter-



valo de tensões analisado. Já no caso dos detetores alimentados com tensão de 15 V, o shot noise é linear só até tensões da ordem de 600 mV, mostrando claramente que para tensões superiores a essa, saturam.

### 4.3 Medidas do ruído de intensidade, de fase e das correlações entre os feixes de bombeio e sonda na EIT

Uma vez realizada a medida de calibração do shot noise, realizamos as medidas do ruído de intensidade e de fase dos feixes de bombeio e sonda antes e depois da interagir com os átomos - na condição de transparência induzida por laser. Os arranjos experimentais e os resultados obtidos são apresentados a seguir.

#### 4.3.1 Primeira montagem experimental

As primeiras medidas experimentais do ruído de intensidade dos feixes de bombeio e sonda e das correlações entre ambos, na transparência induzida por laser, foram realizadas - pelo nosso grupo [2, 3] - usando uma montagem experimental como a mostrada na Fig.4.3.

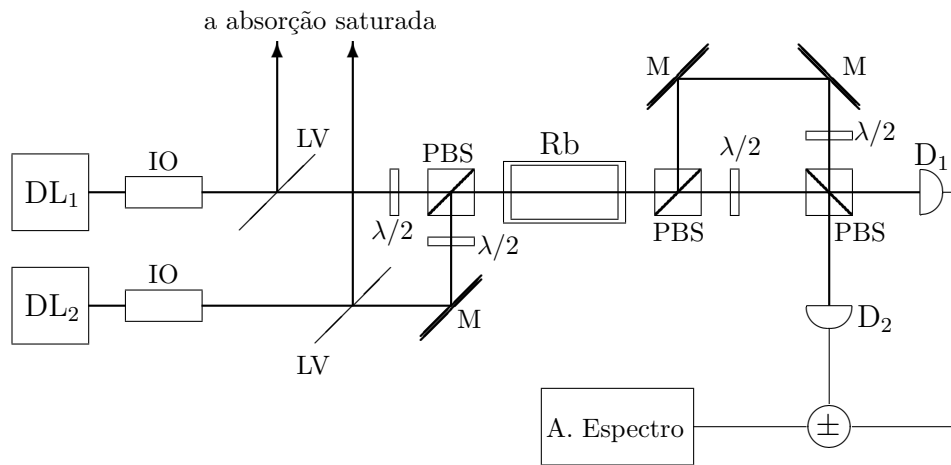


Figura 4.3: Primeira montagem experimental para medição do ruído dos feixes na transparência induzida eletromagneticamente, EIT, em célula de vapor. DL<sub>1,2</sub>: diodo laser com cavidade estendida; IO: isolador óptico; LV: lâmina de vidro comum; M: espelhos; PBS: cubos divisores de feixe polarizantes; D<sub>1,2</sub> detetores; ±: misturador.

O arranjo experimental da Fig.4.3 está baseado na montagem usada por Li e Xiao [49]. Nessa montagem, o diodo laser DL<sub>1</sub>, feixe de bombeio, é fixado na frequência da transição  $^{85}\text{Rb } F=3 \rightarrow F'=3$  do isótopo do rubídio. O

---

diodo laser  $DL_2$ , feixe sonda, é “varrido” em torno das frequências da transição  $^{85}\text{Rb } F=2 \rightarrow F'=1,2$  ou  $3$  por uma cerâmica piezo-elétrica (PZT) instalada na montagem do diodo laser e conectada a uma fonte de modulação. Ambos diodos laser são com cavidade estendida e estabilizados em temperatura e corrente (o leitor interessado neste tipo de montagem de diodos laser pode consultar a Ref.[64]. As frequências dos diodos laser são monitoradas através dos espectros de absorção saturada dos respectivos feixes, as quais são obtidas extraindo uma pequena fração do feixe após o correspondente isolador ótico (IO).

O feixe do bombeio tem polarização horizontal ajustada através de uma lâmina  $\lambda/2$ ; com outra lâmina  $\lambda/2$  ajustamos a polarização do feixe sonda de modo a obter uma polarização ortogonal à do feixe de bombeio. O ajuste correto destas polarizações é fundamental para a experiência, pois utilizamos o fato do cubo divisor de feixe polarizador (PBS) transmitir a luz polarizada horizontal e refletir a luz polarizada vertical.

Após o primeiro cubo divisor de feixe polarizador, PBS, os dois feixes, com polarizações ortogonais, são superpostos para interagirem na mesma região da célula que contém os átomos de rubídio (este alinhamento é vital e bastante crítico). No segundo cubo divisor de feixe polarizador separam-se, novamente, os feixes de bombeio e sonda. Neste ponto, podemos fazer uma detecção balanceada de um dos feixes, por exemplo, o feixe de bombeio bloqueando o feixe sonda, e *vice-versa*.

O esquema apresentado na Fig.4.3, além de nos permitir fazer a medida do ruído de intensidade dos feixes, nos permite medir a correlação do ruído de intensidade entre ambos. A descrição desta medida será feita mais adiante.

### 4.3.2 Sinal DC de transparência induzida

O sinal de transparência induzida por laser é observado enviando só o feixe sonda para a região de detecção balanceada (bloqueando o feixe de bombeio após o segundo cubo divisor de feixe polarizador) e medindo o sinal DC das fotocorrentes dos detetores, o qual nos permite medir a intensidade média transmitida através da amostra atômica. Na Fig.4.4 apresentamos um sinal típico de transparência induzida por laser junto com um sinal do espectro de absorção saturada do feixe sonda. Como pode ser observado nessa figura, a intensidade transmitida através da célula, em função da dessintonia do feixe sonda, apresenta um pico estreito de transparência induzida por laser. A largura desse pico é muito menor que a largura Doppler, a qual é uma assinatura do efeito de interferência destrutiva experimentado pelo feixe sonda nessa condição.

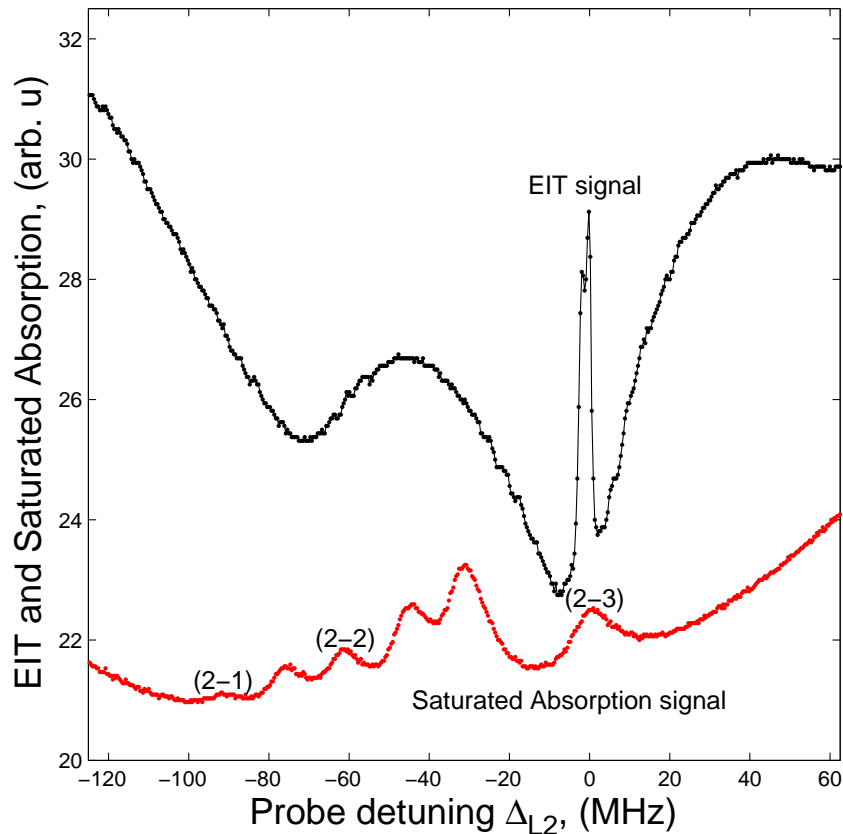


Figura 4.4: **Curva superior:** Transparência induzida por laser para o feixe do sonda em função da dessintonia do mesmo. **Curva inferior:** Espectro de absorção saturada do feixe sonda. As intensidades dos feixes de bombeio e sonda, antes de interagir com os átomos são, respectivamente,  $126,1 \text{ mW/cm}^2$  e  $80,2 \text{ mW/cm}^2$ .

### Largura de batimento entre os feixes de bombeio e sonda

No regime no qual trabalhamos, a largura do sinal de transparência induzida está limitada, entre outros fatores, pela largura de linha do sinal de batimento entre os dois lasers.

A Fig.4.5 mostra o sinal de batimento dos feixes de bombeio e sonda em função da frequência de análise. Para realizar esta medida, os feixes dos lasers, com a mesma polarização, são combinados em um divisor de feixe ( $BS_1$ ), após o qual propagam-se colinearmente e no mesmo sentido. Este sinal é enviado a um único detetor com um pequeno circuito elétrico que filtra a sua componente de alta frequência, de modo tal que possa ser analisada no Analisador de Espectros.

A curva preta da Fig.4.5 foi obtida com ambos lasers sintonizados na mesma linha ou transição atômica, o que é dado por um sinal de absorção saturada

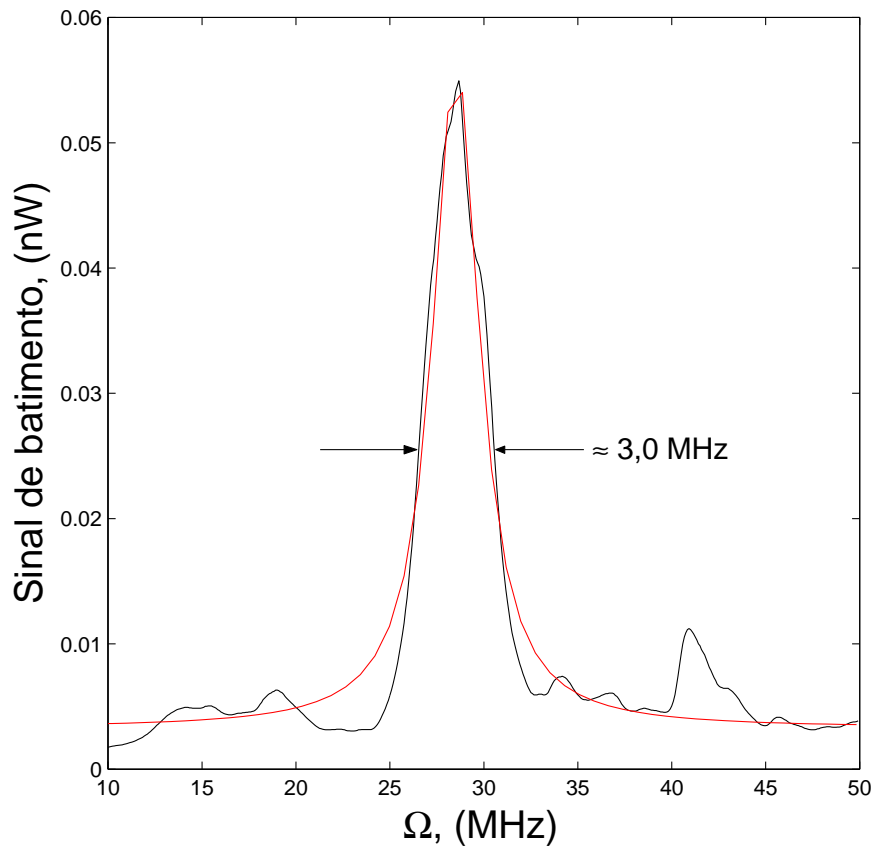


Figura 4.5: Sinal de batimento dos laser de bombeio e sonda em função da frequência de análise. A curva vermelha corresponde a um ajuste Lorentziano da medida.

montado previamente para referência em frequência dos lasers. Desligamos a varredura dos lasers e os estabilizamos perto de uma transição, por exemplo,  $F = 3 \rightarrow F' = 2$  do  $^{85}\text{Rb}$ . No Analisador de Espectros escolhemos um intervalo de frequências de análise e, sintonizando manualmente um dos lasers com relação ao outro, procuramos o sinal de batimento entre ambos. A curva vermelha da mesma figura corresponde ao ajuste Lorentziano da medida. Das curvas anteriores vemos que a largura de linha do batimento entre os lasers é  $\approx 3,0 \text{ MHz}$  o que nos dá uma largura de linha dos lasers  $\approx 1,5 \text{ MHz}$ , compatível com o valor da largura de linha teórica do laser com cavidade estendida da Ref.[64].

### 4.3.3 Ruído dos feixes de bombeio e sonda antes de interagir com os átomos

Após observarmos o sinal de transparência induzida no nível DC das fotocorrentes dos detetores, passamos ao estudo das propriedades estatísticas dos

feixes de bombeio e sonda antes de interagir com os átomos. Este é um passo lógico se consideramos que as propriedades estatísticas dos campos são modificadas no processo de interação com os átomos.

Estas medidas foram realizadas baseadas na Fig.4.3. Para fazer isto, simplesmente, tiramos a célula que contém os átomos da região de interação com os feixes e fizemos medidas de detecção balanceada para cada feixe em função da frequência de análise. Os espectros de ruído de ambos feixes foram feitos utilizando um Analisador de Espectros modelo HP 8560E.

Para podermos escolher a frequência de análise na qual seriam feitas as medidas do ruído de intensidade dos feixes de bombeio e sonda na condição de transparência induzida, fizemos as medidas entre 0 e 50 MHz. Os resultados destas medidas podem ser vistos na Ref.[3].

#### 4.3.4 Ruído de intensidade dos feixes de bombeio e sonda na EIT

Uma vez escolhida a frequência de análise na qual foram feitas as medidas do ruído de intensidade dos feixes de bombeio e sonda, na condição de transparência induzida, colocamos a célula com os átomos na região de interação com os campos e fizemos medidas do ruído de ambos feixes e da correlação entre ambos.

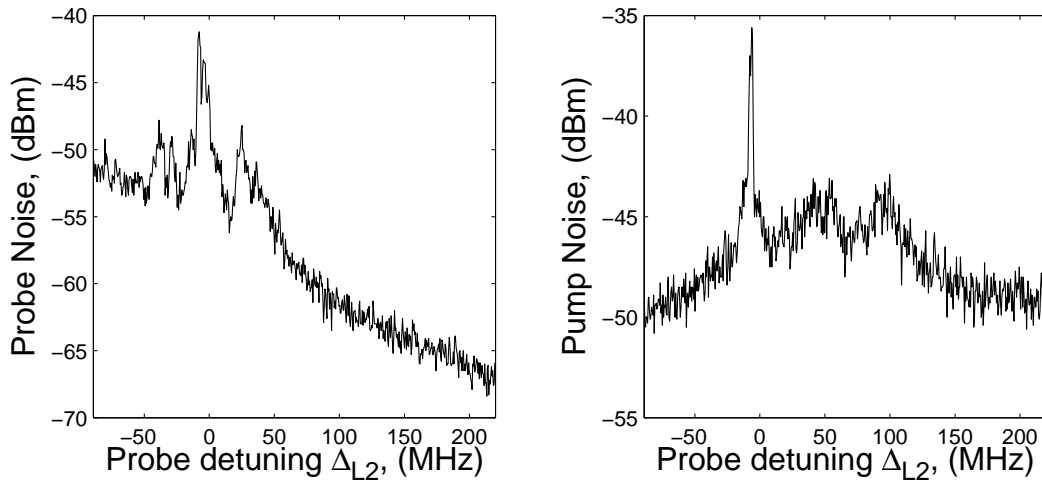


Figura 4.6: Espectro do ruído de intensidade dos feixes sonda (esquerda) e do bombeio (direita) na condição de EIT em função da dessintonia do feixe sonda  $\Delta_{L2}$ .  $I_s = 13,41 \text{ mW/cm}^2$ ;  $I_b = 20,49 \text{ mW/cm}^2$ ; frequência de análise  $\Omega = 10 \text{ MHz}$ .

Na Fig.4.6 apresentamos os resultados obtidos na medida do ruído de intensidade dos feixes sonda e de bombeio, em função da dessintonia do feixe sonda  $\Delta_{L2}$ . O ruído eletrônico para essa medida foi de  $-80 \text{ dBm}$  e o *shot noise*

de  $\approx -74$  dBm. A figura da esquerda corresponde ao feixe sonda (Probe noise) e a da direita ao feixe de bombeio (Pump noise). As medidas foram realizadas no modo *zero span* do Analisador de Espectros, utilizando como *trigger* o sinal de varredura de frequência do feixe sonda. A largura de banda de vídeo, VBW, foi escolhida em 3 kHz e a largura de banda de resolução, RBW, correspondeu a 300 kHz.

As intensidades dos feixes sonda e de bombeio usadas foram, respectivamente:  $I_s = 13,41$  mW/cm<sup>2</sup> e  $I_b = 20,49$  mW/cm<sup>2</sup>. A frequência de análise usada foi  $\Omega = 10$  MHz. Das curvas da Fig.4.6, podemos ver que, para todas as frequências do feixe sonda, ambos feixes apresentam um caráter super-Poissoniano, no entanto, quando a dessintonia do sonda é nula ou seja, na condição de ressonância da transparência induzida, os espectros de ruído de intensidade de ambos feixes apresentam um pico estreito de excesso de ruído de  $\approx 10$  dB, sendo esta uma manifestação de que a coerência induzida no meio atômico pelos feixes, modifica as propriedades estatísticas dos mesmos.

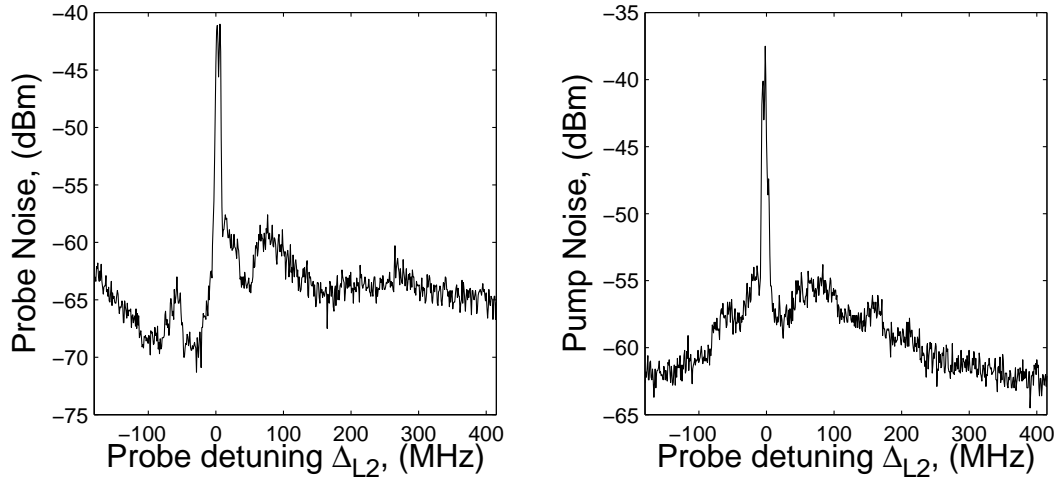


Figura 4.7: Espectro do ruído de intensidade dos feixes sonda (esquerda) e do bombeio (direita) na condição de EIT em função da dessintonia do feixe sonda  $\Delta_{L2}$ .  $I_s = 64,4$  mW/cm<sup>2</sup>;  $I_b = 63,3$  mW/cm<sup>2</sup>; frequência de análise  $\Omega = 10$  MHz.

Outros resultados obtidos com intensidades do feixe de bombeio muito maiores que a intensidade do feixe sonda, mostram que, ainda nessas condições, as flutuações desse campo são modificadas de maneira significativa, de modo que o excesso de ruído observado na condição de transparência induzida sugere que as propriedades estatísticas desse feixe (bombeio) não devem ser desprezadas como habitualmente é feito [59, 60, 66].

Medidas similares às anteriores foram realizadas aumentando a intensidade de ambos feixes, mantendo a frequência de análise constante. A forma do sinal do ruído de intensidade dos feixes não muda, apresentando ambos um pico

estreito de excesso de ruído na condição de ressonância da EIT. A Fig.4.7, apresenta um desses resultados. A intensidade do feixe sonda foi  $I_s = 64,4 \text{ mW/cm}^2$  e do feixe de bombeio foi  $I_b = 63,3 \text{ mW/cm}^2$ . O shot noise dessa medida foi  $\approx -73 \text{ dBm}$ .

### 4.3.5 Medidas de correlação e anti-correlação

#### Medida de correlação

As primeiras medidas de correlação entre o ruído de intensidade dos feixes de bombeio e sonda, na condição de transparência induzida por laser, foram realizadas com a montagem experimental mostrada na Fig.4.3. Neste caso, medimos as propriedades estatísticas do sinal de ruído da soma e da diferença de intensidade dos feixes. Para estas medidas, cada detetor deteta só um dos feixes. O correspondente nível shot noise é calculado em função da curva de calibração (valores médios das intensidades dos feixes) da medida do shot noise apresentado em Sec.4.2.2.

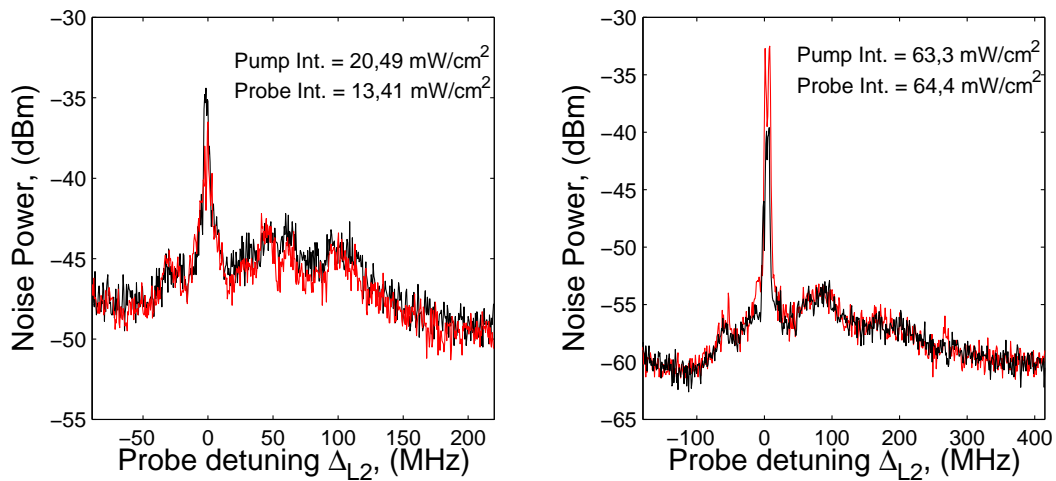


Figura 4.8: Ruído da soma (preta) e da diferença (vermelha) em função da dessintonia do feixe sonda  $\Delta_{L2}$ : (esquerda)  $I_s = 20,49 \text{ mW/cm}^2$ ,  $I_b = 13,41 \text{ mW/cm}^2$  e  $\Omega = 10 \text{ MHz}$ ; Shot noise  $\approx -74 \text{ dBm}$ . (direita)  $I_s = 64,4 \text{ mW/cm}^2$ ,  $I_b = 63,3 \text{ mW/cm}^2$  e  $\Omega = 10 \text{ MHz}$ ; Shot noise  $\approx -73 \text{ dBm}$ .

A Fig.4.8 mostra os resultados do ruído da soma (curva preta) e da diferença (curva vermelha) correspondentes às medidas do ruído de intensidade dos feixes de bombeio e sonda apresentadas nas Figs.4.6 e 4.7, em função da dessintonia do feixe sonda. Como podemos ver nessa figura, para o caso das intensidades dos feixes menores, o ruído do sinal da soma (misturador na posição “+”) é maior do que o ruído do sinal da diferença (misturador na posição “-”). A diferença de  $\approx 5 \text{ dB}$  entre o ruído do sinal da soma e o ruído do sinal da

---

diferença das curvas da esquerda da Fig.4.8, na condição de transparência induzida por laser, é uma manifestação da correlação entre as intensidades dos feixes de bombeio e sonda, introduzida pelos átomos no processo de interação com os mesmos.

Os resultados experimentais obtidos para o ruído de intensidade dos feixes de bombeio e sonda, bem como os das correlações do ruído de intensidade, na transparência induzida por laser, apresentados anteriormente podem ser revisados nas Refs.[3, 2].

### Medida de anti-correlação

Além de obtermos correlação de ruído de intensidade entre os campos de bombeio e sonda na condição de transparência induzida, para nossa surpresa também observamos *anti-correlações* de ruído de intensidade entre eles. Verificamos, então, o comportamento dessa anti-correlação em função das intensidades dos lasers de diodo e percebemos que, para intensidades baixas, comparadas com a intensidade de saturação do meio atômico (intensidades utilizadas nos resultados da Ref.[2]), conseguimos reproduzir os resultados de correlação de ruído de intensidade entre os feixes. Na medida em que aumentamos as intensidades, observamos essa anti-correlação<sup>2</sup>. As curvas da direita da Fig.4.8 são o ruído da soma (curva preta) e da diferença (curva vermelha) de intensidade dos feixes, correspondentes às medidas de correlação dos resultados apresentados na Fig.4.7. Contrário ao caso da correlação, o ruído do sinal da soma é menor do que o ruído do sinal da diferença, de modo que para essas intensidades dos feixes e essa frequência de análise os feixes estão anti-correlacionados em intensidade.

A anti-correlação do ruído de intensidade entre os feixes pode ser entendida da seguinte forma: como sabemos, o fenômeno de transparência induzida por laser ocorre num sistema  $\Lambda$ , no qual os feixes sonda e de bombeio induzem transições Raman entre os estados atômicos. Em cada uma dessas transições, a absorção de um fóton de um dos feixes é acompanhada pela emissão subsequente de um fóton no outro campo. Em outras palavras, quando a intensidade de um campo diminui, a do outro aumenta. Por que não observamos essa anti-correlação antes? A absorção desempenha um papel de grande importância: a absorção de um dos feixes é condicionada à intensidade do outro. No regime de trabalho, a largura do sinal de EIT é limitada pela largura do sinal de batimento entre os dois lasers (largura da soma das larguras dos campos), por alargamento por potência e por efeito Doppler. Ao introduzirmos a limitação associada à largura de batimento entre os lasers, acreditamos que seja possível variar suas intensidades sem que haja variação apreciável do sinal DC previsto para EIT. Assim, a redução da absorção sofre uma saturação e o

---

<sup>2</sup>A correlação também depende da frequência de análise, como será mostrado mais adiante.



mecanismo de anti-correlação, associado ao processo Raman, pode predominar. Esta explicação ainda não tem base nos modelos teóricos que desenvolvemos, sendo necessária a sua confirmação.

### 4.3.6 Segunda montagem experimental

Com a idéia de caracterizarmos melhor as correlações de ruído de intensidade entre os feixes de bombeio e sonda na condição de transparência induzida e, ao mesmo tempo, podermos fazer um estudo do ruído da quadratura fase dos feixes, bem como das correlações de fase entre eles, modificamos a montagem experimental e refizemos as medidas.

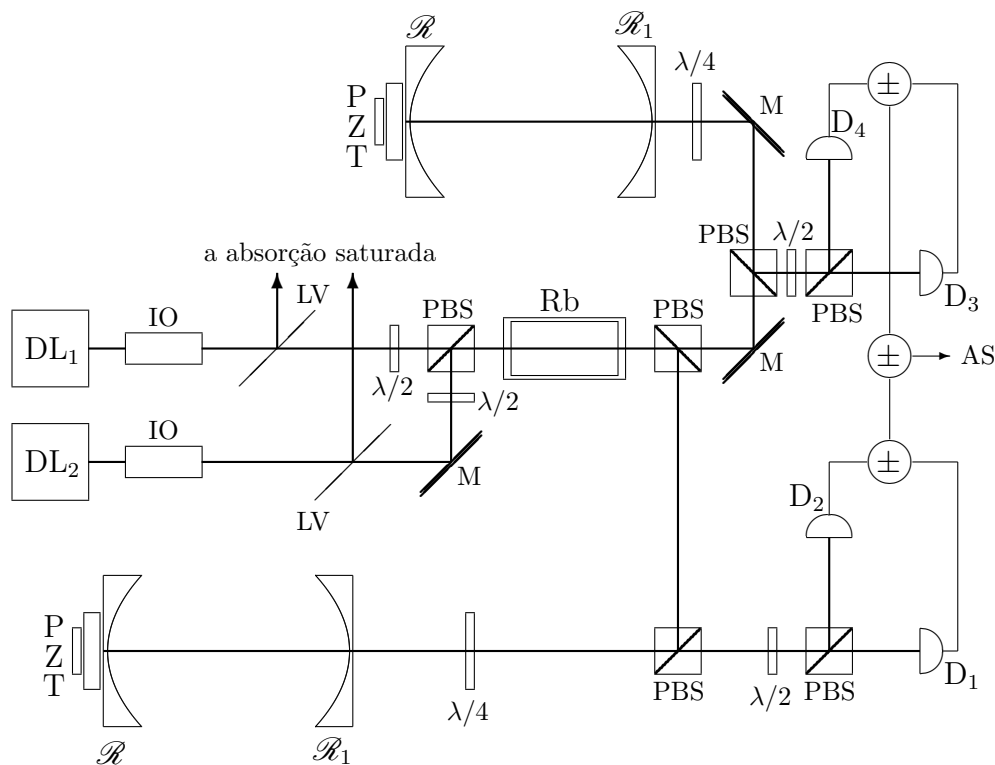


Figura 4.9: Segunda montagem experimental para o estudo de ruído de quadraturas e correlações em EIT. DL<sub>1,2</sub>: Diodos lasers; M Espelhos planos; LV: Lâminas de vidro; D<sub>1,2,3,4</sub> detectores; IO: Isolador óptico; PZT: Cerâmica piezo-elétrica, R<sub>1</sub>: espelhos circulares de coeficientes de reflexão  $\mathcal{R}_1 < 1$ ; R: Espelhos circulares de coeficientes de reflexão  $\mathcal{R} \approx 1$ ; PBS: divisor de feixe polarizante.

O arranjo experimental ilustrado na Fig.4.9 consiste, novamente, de dois diodos lasers com cavidade estendida estabilizados em temperatura e corrente DL<sub>1</sub> e DL<sub>2</sub>, para os feixes de bombeio e sonda, respectivamente. Após extrair

as correspondentes porções de ambos feixes para a absorção saturada, os feixes são superpostos com polarizações ortogonais na região de interação com os átomos, o que se consegue com as lâminas de meia onda  $\lambda/2$  e o cubo divisor de feixe polarizante PBS. Outro cubo divisor de feixe polarizante separa novamente os feixes após a região de interação com os átomos, os quais são enviados a cavidades, com espelhos esféricos, de análise - confocais - e formadas ambas por espelhos de acoplamento  $R_1$  - de coeficiente de reflexão  $< 1$  - e  $R_2$  - de coeficiente de reflexão  $\mathcal{R}_2 \approx 1$ . Uma pequena fração do campo intracavidade sai pelo espelho de acoplamento das cavidades de análise, sendo esse sinal enviado a um Osciloscópio para caracterização experimental das mesmas (largura de linha e finesse).

Os feixes refletidos pelas cavidades de análise são enviados a esquemas de detecção balanceada independentes, um para cada feixe. Os sinais dos misturadores de cada detecção balanceada são combinados num terceiro misturador, cujos sinais são enviados ao Analisador de Espectros.

Com o arranjo experimental descrito acima, temos acesso ao ruído das quadraturas de ambos feixes e às correlações entre eles.

Para fazer as medidas de correlação, o misturador de cada detecção balanceada fornece, com a chave na posição “+”, o ruído de intensidade (ou de fase) do feixe e, na posição “-”, o shot noise da medida. Deste modo, se os misturadores de ambas detecções estiverem com a chave na posição “+”, o terceiro misturador, com a chave na mesma posição, nos dá o ruído da soma das intensidades (ou das fases) dos feixes e, com a chave na posição “-”, o ruído da diferença. Novamente, se o sinal do ruído da soma é maior do que o sinal de ruído da diferença, temos uma correlação de intensidade (ou de fase) entre os feixes de bombeio e sonda, caso contrário, temos uma anti-correlação.

### 4.3.7 Novas medidas de ruído de intensidade dos campos e correlações

As primeiras medidas realizadas com o arranjo experimental da Fig.4.9 foram as do ruído de intensidade dos feixes de bombeio e sonda e da correlação e anti-correlação de ruído de intensidade entre ambos feixes.

Para realizarmos estas medidas bloqueamos o interior de cada uma das cavidades de análise, de modo que só temos acesso ao ruído de intensidade dos feixes de bombeio e sonda, bem como ao da correlação de intensidade entre ambos. Além disso, e com o objetivo de melhor caracterizar essa correlação, decidimos estabilizar ativamente nossos lasers. O feixe de bombeio foi estabilizado no pico da linha de cross-over (3-2/3-4) do sinal de absorção saturada. Por outro lado, o feixe sonda foi estabilizado no pico do sinal DC de transparência induzida do feixe sonda.

A locação do feixe de bombeio é feita com o sinal de absorção saturada do mesmo, sendo que a locação do feixe sonda, no pico da transparência induzida,

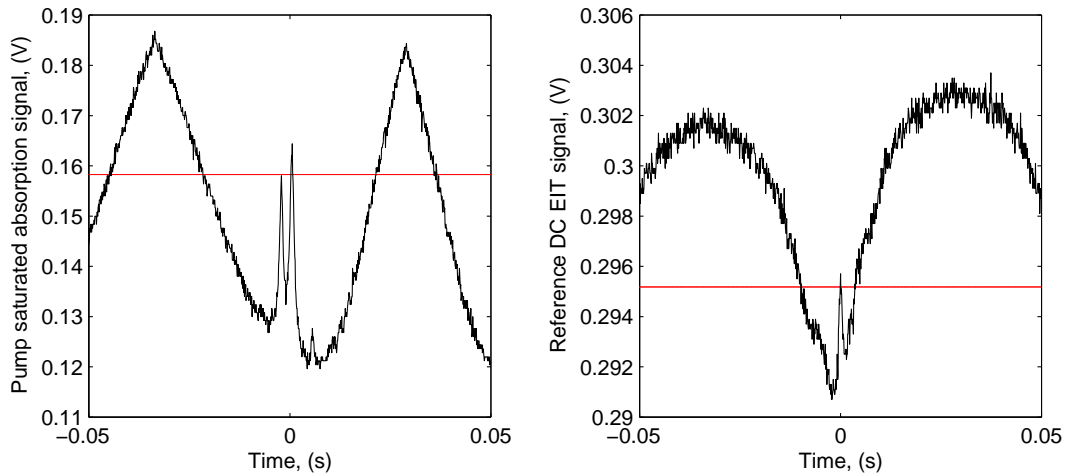


Figura 4.10: Sinal de absorção saturada do feixe de bombeio (esquerda) e sinal DC de EIT (direita). As curvas vermelhas correspondem ao valor médio dos sinais de lock-in dos respectivos feixes.

é feita com um sinal de EIT alternativo. Este sinal de EIT é obtido extraindo parte dos feixes de bombeio e sonda (não mostrados na Fig.4.9) do primeiro cubo divisor de feixe polarizante. Um pin-hole nos permite controlar a área de ambos feixes na região de interação com os átomos de Rb contidos numa célula de vapor auxiliar do mesmo elemento. Após a célula de Rb, com ajuda de um polarizador e um filtro de densidade neutra, selecionamos o sinal DC de EIT do feixe sonda. Finalmente, este sinal é enviado a um Osciloscópio que nos dá a referência para a estabilização do feixe sonda. A estabilização dos sinais foi feita com circuitos “lock-in” comerciais (modelo 5209 da EG&E instrument).

Dado que os feixes responsáveis pela transparência induzida estão estabilizados, as medidas de ruído de intensidade e da correlação entre os feixes de bombeio e sonda foram feitas em função tanto da frequência de análise do Analisador de Espectros, quanto das diferentes intensidades dos feixes na região de interação.

Em primeiro lugar, para vermos quando a correlação vira anti-correlação, resolvemos realizar medidas com  $14,5 \text{ MHz}$  de *span*, com a frequência de análise variando entre  $2,5$  e  $17 \text{ MHz}$ . Neste caso cada ponto do arquivo gerado pelo Analisador de Espectros representa uma frequência de análise diferente, com média apenas em 100 medidas. Mesmo assim conseguimos obter coeficientes de correlação normalizados seguindo o algoritmo de medida discutido abaixo e com isso mapeamos, de uma forma mais geral, a passagem de correlação para anti-correlação variando tanto a intensidade como a frequência de análise. A variação das intensidades dos campos foi feita com ajuda de um filtro de

densidade variável colocado na frente da célula com os átomos de Rb, de modo que as intensidades de ambos feixes permaneciam iguais.

Todas as medidas de correlação consistiam, na realidade, de quatro medidas, de onde era inferido o valor do coeficiente de correlação através da Eq.4.1. Chamando de caixas 1 e 2 as caixas  $\pm$  das detecções balanceçadas dos feixes de bombeio e sonda, respectivamente, e de caixa final a caixa  $\pm$  que junta o sinal das duas detecções balanceçadas, o algoritmo das medidas era o seguinte:

1. Com as caixas 1, 2 e final na posição “+”, fazíamos a medida do ruído da soma,  $S_+(\Omega)$ , dos feixes.
2. Com as caixas 1 e 2 na posição “+” e a caixa final na posição “-”, fazíamos a medida do ruído da diferença,  $S_-(\Omega)$ , dos feixes.
3. Com a detecção do laser 1 bloqueada e as caixas 2 e final na posição “+”, fazíamos a medida do ruído do feixe sonda,  $S_{22}(\Omega)$ .
4. Com a detecção do laser 1 bloqueada, a caixas 2 na posição “-” e a caixa final na posição “+”, fazíamos a medida do shot noise do feixe sonda,  $S_{22,shot}(\Omega)$ .
5. Com a detecção do laser 2 bloqueada e as caixas 1 e final na posição “+”, fazíamos a medida do ruído do feixe de bombeio,  $S_{11}(\Omega)$ .
6. Com a detecção do laser 2 bloqueada, a caixa 1 na posição “-” e a caixa final na posição “+”, fazíamos a medida do shot noise do feixe de bombeio,  $S_{11,shot}(\Omega)$ .

As curvas da esquerda da Fig.4.11 correspondem a uma das medidas do ruído de intensidade (curva preta) e do shot noise (curva vermelha) do feixe sonda [Probe noise]. As curvas de cor azul e cian correspondem aos sinais de ruído da soma e da diferença do eletrônico, respectivamente. As curvas da direita, da mesma figura, são as curvas do ruído de intensidade e do shot noise do feixe de bombeio [Pump noise]. Essas curvas foram tomadas em ausência dos átomos e com ambos feixes com a mesma intensidade na região de interação, de valor  $118 \text{ mW/cm}^2$ .

Nas medidas da Fig.4.11 os detetores das detecções balanceçadas, uma para cada feixe, foram alimentados com tensão de 70 V. No analisador de espectro a largura de banda de referência foi de 1 MHz e a largura de banda de vídeo de 3 kHz. Como podemos ver nessa figura, o ruído da soma e da diferença do eletrônico são praticamente iguais e apresentam um aumento de  $\approx 8 \text{ dB}$  no intervalo de frequências escolhido.

Por outro lado, observando as curvas do shot noise e do ruído de intensidade para ambos feixes, vemos que eles apresentam um caráter Poissoniano em todo o intervalo de frequências escolhido. No caso do feixe sonda vemos

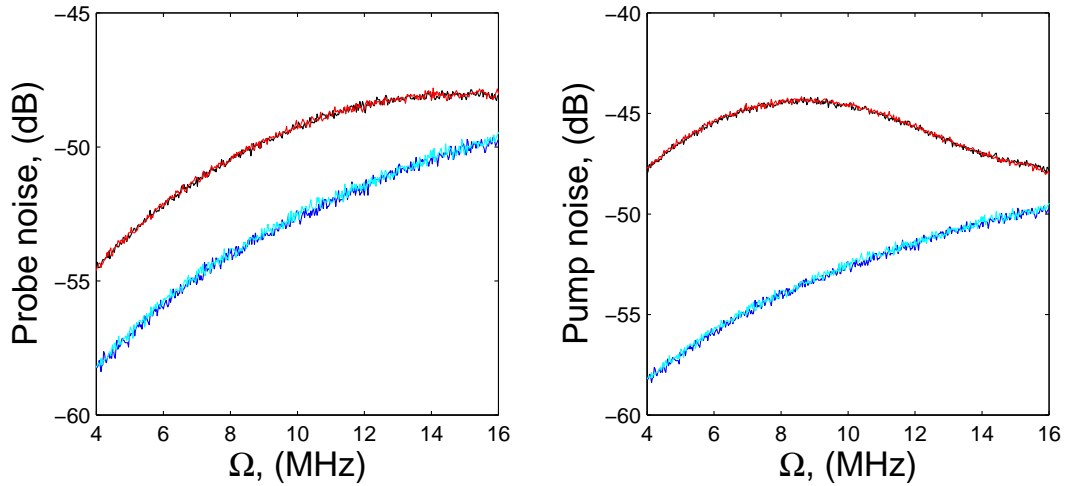


Figura 4.11: Medida do espectro de ruído dos feixes de bombeio (direita) e sonda (esquerda) em ausência de átomos e em função da frequência de análise. Feixes com igual intensidade na região de interação e de valor  $118 \text{ mW/cm}^2$ . Ruído do feixe (curva preta); shot noise (curva vermelha); ruído eletrônico (curvas azul e cian).

que, à medida que aumenta a frequência de análise, tanto o ruído de intensidade quanto o shot noise aumentam, sendo limitados ao ruído eletrônico na frequência de análise de  $\approx 18 \text{ MHz}$ . O máximo valor do ruído de intensidade e do shot noise para esse feixe é na frequência de análise de  $\approx 14 \text{ MHz}$ . Já o caso do ruído de intensidade e do shot noise do feixe de bombeio tem um comportamento diferente. Mais ruidoso do que o feixe sonda em todo o intervalo de frequências escolhido, vemos que tanto o ruído de intensidade quanto o ruído shot aumentam no intervalo de frequências entre 4 e 9 MHz, para logo diminuir até ser limitado ao ruído eletrônico, também, na frequência de análise de  $\approx 18 \text{ MHz}$ .

A situação anterior muda consideravelmente quando colocamos os átomos na região de interação com os feixes de bombeio e sonda na condição de transparência induzida. Para vermos esta mudança apresentamos, na Fig.4.12, as medidas equivalentes às apresentadas na Fig.4.11, para os feixes de bombeio e sonda, nas mesmas condições experimentais, mas agora em presença dos átomos.

Observando as curvas do ruído de intensidade (curva preta) e do shot noise (curva vermelha), do feixe sonda, vemos que os átomos, na condição de transparência induzida, transformaram o caráter Poissoniano em super-Poissoniano em todo o intervalo de frequências escolhido. Por outro lado, observando as curvas do ruído de intensidade e do shot noise do feixe de bombeio, vemos que a interação com os átomos o leva a um caráter super-Poissoniano até uma frequência de  $\approx 15 \text{ MHz}$ , após o qual conserva seu caráter poissoniano.

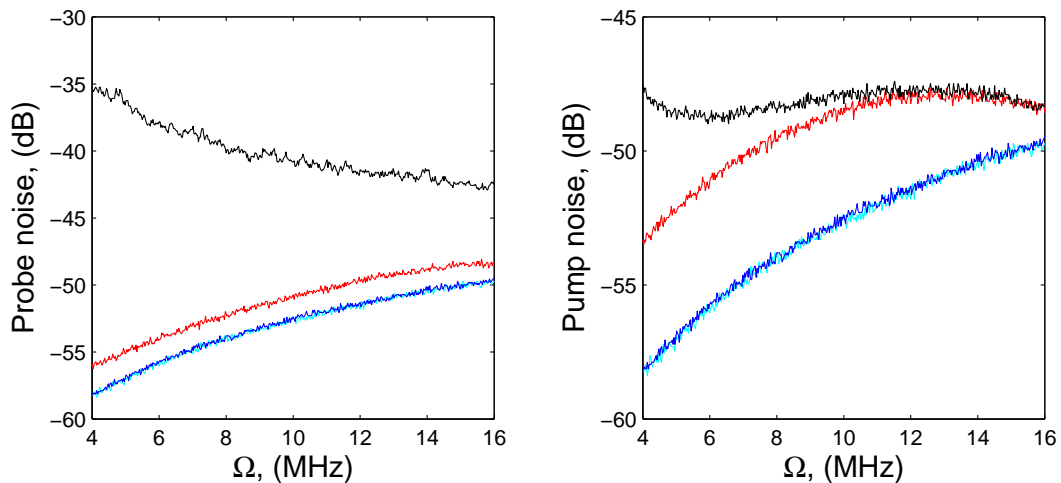


Figura 4.12: Medida do espectro de ruído dos feixes de bombeio e sonda com átomos e em função da frequência de análise. Feixes com igual intensidade na região de interação e de valor  $118 \text{ mW/cm}^2$ . Ruído do feixe (curva preta); shot noise (curva vermelha); ruído eletrônico (curvas azul e cian).

Comparando o ruído de intensidade do feixe sonda entre as Figs.4.11 e Fig.4.12 vemos que, para uma frequência de análise de  $\approx 4 \text{ MHz}$ , o respectivo ruído teve um aumento de  $\approx 20 \text{ dB}$ , sendo que para a frequência de análise de  $\approx 16 \text{ MHz}$  o aumento do respectivo ruído foi de aproximadamente só  $5 \text{ dB}$ . Fazendo a mesma comparação com as curvas correspondentes ao feixe de bombeio vemos que, em  $\approx 4 \text{ MHz}$  o ruído do feixe não apresenta grande mudança com a presença dos átomos, no entanto, para frequências superiores a  $4 \text{ MHz}$  e até  $\approx 9 \text{ MHz}$  (máximo do ruído de intensidade em ausência dos átomos) o ruído de intensidade deste feixe apresenta uma diminuição, sendo a máxima de  $\approx 3 \text{ dB}$  para  $9 \text{ MHz}$ .

Com relação ao shot noise das medidas de ambos feixes em presença dos átomos, vemos que ambos apresentam uma diminuição do ruído. No caso do feixe sonda há uma diminuição de  $\approx 2 \text{ dB}$  para todo o intervalos de frequência escolhido. Já o caso do feixe de bombeio, apresenta uma diminuição de  $\approx 5 \text{ dB}$  para uma frequência de  $\approx 4 \text{ MHz}$ . Isto era de se esperar, considerando que a absorção dos feixes, por parte dos átomos, faz com que o número médio de fótons nos detectores diminua.

Para observarmos a correlação, ou a anti-correlação do ruído de intensidade entre os feixes de bombeio e sonda, na condição de transparência induzida, nas curvas da esquerda da Fig.4.13 mostramos o ruído da soma (curva preta) e da diferença (curva vermelha) de intensidade dos feixes. As curvas superiores correspondem aos sinais correspondentes em presença dos átomos, as curvas inferiores são as equivalentes das curvas superiores em ausência dos átomos. As

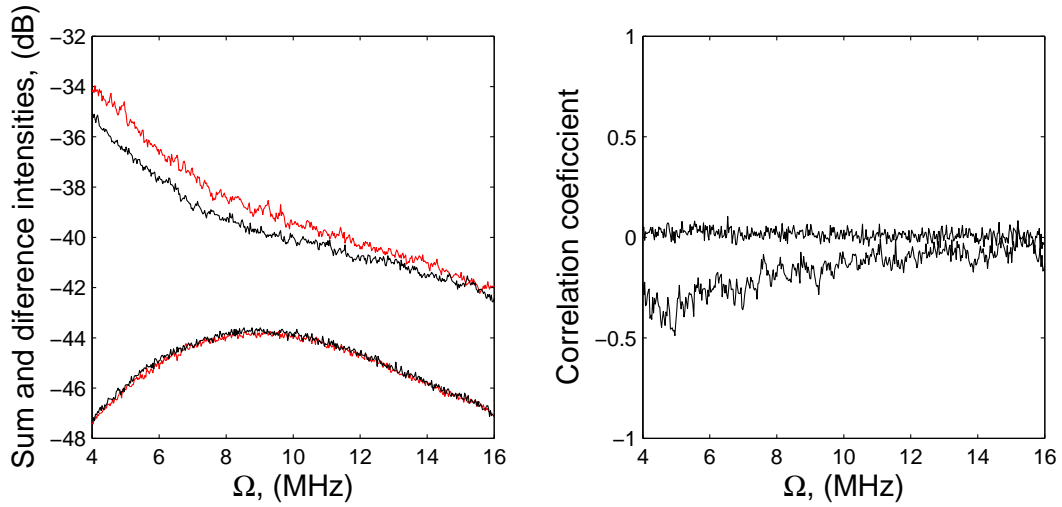


Figura 4.13: Esquerda: Ruído da soma (preta) e da diferença (vermelha) de intensidade dos feixes de bombeio e sonda em presença (superiores) e ausência (inferiores) dos átomos, respectivamente. Direita: Coeficientes de correlação com átomos (inferior), sem átomos (superior).

curvas da direita, da mesma figura, mostram os correspondentes coeficientes de correlação [20] das medidas [com átomos (inferior) e sem átomos (superior)], o qual é obtido a partir da seguinte expressão:

$$\mathcal{C}_{P12}(\Omega) = \frac{S_{P+}(\Omega) - S_{P-}(\Omega)}{S_{P+}(\Omega) + S_{P-}(\Omega)} \times \frac{S_{P11}(\Omega) + S_{P22}(\Omega)}{\sqrt{4(S_{P11}(\Omega) S_{P22}(\Omega))}}; \quad (4.1)$$

com  $S_{P+}(\Omega)$ ,  $S_{P-}(\Omega)$ ,  $S_{P11}(\Omega)$  e  $S_{P22}(\Omega)$  a potência de ruído da soma, da diferença, do feixe de bombeio e do feixe sonda, respectivamente, e cujos valores estão restritos ao intervalo  $[-1, 1]$ .

Das curvas correspondentes aos coeficientes de correlação da Fig.4.13, vemos claramente que, para as intensidades dos feixes de bombeio e sonda consideradas, em presença dos átomos e na condição de transparência induzida, existe uma anti-correlação de intensidade entre os feixes, para todo o intervalo de frequências escolhido. À medida que aumenta a frequência de análise, essa anti-correlação aproxima-se de um estado não correlacionado, como é o caso dos feixes sem interagir com os átomos (curva superior) da mesma figura, ou seja sem EIT.

As medidas descritas anteriormente foram repetidas diminuindo as intensidades de ambos feixes na região de interação com os átomos, mas sempre na condição de EIT. Novamente, para baixas intensidades, comparadas com a intensidade de saturação do meio atômico considerado, observamos a correlação de intensidade entre ambos feixes.

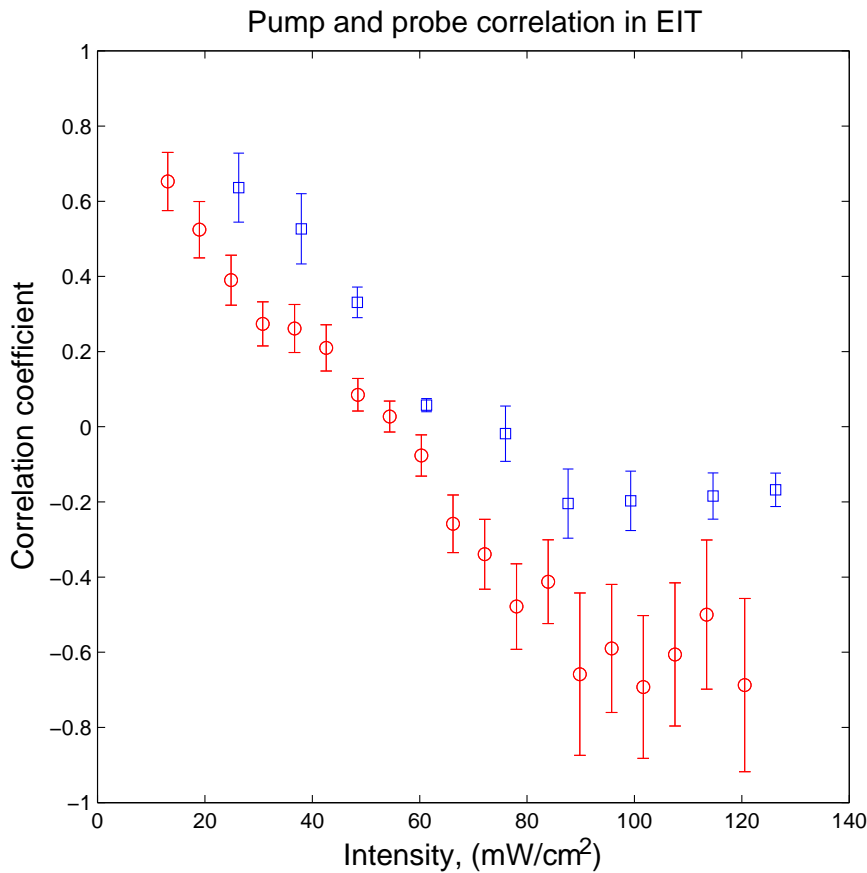


Figura 4.14: Variação do coeficientes de correlação,  $\mathcal{C}_{P12}(\Omega)$ , de intensidade entre os feixes de bombeio e sonda na EIT.  $\Omega = 10 \text{ MHz}$  (curva vermelha);  $\Omega = 3.5 \text{ MHz}$  (curva azul). Médias em 60000 medidas.

Para vermos quando a correlação vira anti-correlação, como função da intensidades dos feixes, fizemos medidas da correlação para duas frequências de análise diferentes, variando as intensidades dos feixes na região de interação. Esta variação de intensidades, tal como foi mencionado anteriormente, foi feita com ajuda de um filtro de densidade neutra variável colocado na frente da célula com os átomos de Rb, de modo que as intensidades de ambos feixes permanecessem iguais.

Na Fig.4.14 apresentamos os resultados obtidos, no modo *zero span* do Analisador de Espectros, para as medidas da correlação de ruído de intensidade entre os feixes sonda e de bombeio, em função das intensidades de cada um dos feixes, para as frequências de análise  $\Omega = 10 \text{ MHz}$  (curva vermelha) e  $\Omega = 3,5 \text{ MHz}$  (azul). Novamente, as medidas forma feitas com os parâmetros RBW e VBW do Analisador de Espectros em  $1 \text{ MHz}$  e  $3 \text{ kHz}$ , respectivamente, e adquirindo a média sobre 100 medidas. Os pontos das curvas correspondem



ao valor médio do coeficiente de correlação normalizado e a barra de erro corresponde ao erro da média das medidas.

Nessas medidas os 600 pontos do arquivo gerado pelo Analisador de Espectros representavam a mesma situação experimental. Por conta disso, a partir deles obtivemos uma média melhor (média em 60000 medidas) e podíamos deduzir o erro na obtenção da média. Estes são, portanto, nossos resultados com a melhor estatística.

O primeiro ponto importante a observar é o alto grau de correlação, maior que 50%, obtido a partir de lasers que eram independentes antes de interagir com os átomos. Este fato, bem contra-intuitivo à primeira vista, pode ser entendido notando que ambos lasers não possuem excesso de ruído nas asas do espectro antes da interação. Desta forma, todo o excesso de ruído nas asas vem da interação com os átomos, cujo estado, na situação de EIT, depende de ambos feixes. A correlação que medimos revela que a interação átomos-campos, na EIT, “imprime” uma informação correlacionada nos feixes. O surgimento da correlação entre os feixes pode ser entendido se lembramos que, na situação de EIT, a presença de um dos feixes afeta a absorção do outro, e vice-versa. Assim, o aumento (diminuição) da intensidade de um dos feixes tende a aumentar a (diminuir) a intensidade do outro no detector, gerando assim a correlação.

Outro ponto importante é a passagem de correlação para anti-correlação com o aumento da intensidade dos feixes. Como foi mencionado na introdução, esta passagem nos surpreendeu e obrigou a toda uma reformulação do nosso modelo teórico (quântico) inicial, que apresentaremos no Cap.5. Para contornar esta situação, desenvolvemos o modelo teórico semiclássico que é o tema do Cap.6. Além da imagem física apresentada na Sec.4.3.5, outras possíveis explicações envolvem efeitos de dicroísmo e birrefringência no meio [67]. É bom frisar que nosso modelo teórico atual (semiclássico) já mostra esta passagem de correlação para anti correlação com o aumento da intensidade, o que nos falta ainda é interpretar melhor a teoria para entender o efeito físico fundamental por trás desse comportamento.

### Estruturas no pico de EIT

Para estudar a estrutura dos sinais de ruído na condição de transparência induzida por laser optamos por fazer uma varredura local na frequência do feixe sonda, de algumas dezenas de  $MHz$ , em torno da transição  $^{85}Rb|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow ^{85}Rb|5P_{3/2}, F' = 3\rangle$ .

Essas medidas foram realizadas com a montagem experimental esquematizada na Fig.4.9, com o interior das cavidades de análise bloqueado e com o feixe de bombeio estabilizado no pico crossover  $^{85}Rb|5S_{1/2}, F = 3\rangle \rightarrow ^{85}Rb|5P_{3/2}, F' = 3 - 4\rangle$ .

A primeira série de medidas que apresentamos na Fig.4.15 correspondem ao

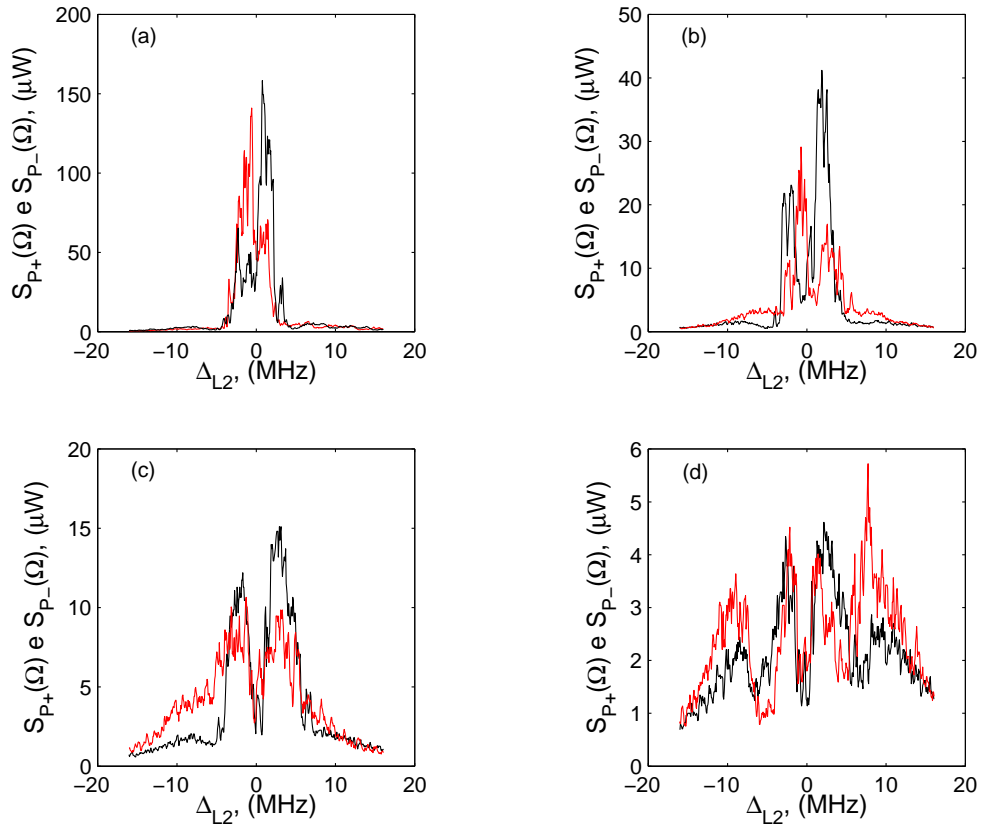


Figura 4.15: Ruído da soma  $S_{P+}(\Omega)$  (curva preta) e da diferença  $S_{P-}(\Omega)$  (curva vermelha) de intensidade dos feixes em função da dessintonia do feixe sonda  $\Delta_{L2}$ , para diferentes valores de frequência de análise. (a)  $\Omega = 2 \text{ MHz}$ ; (b)  $\Omega = 6 \text{ MHz}$ ; (c)  $\Omega = 10 \text{ MHz}$  e (d)  $\Omega = 15 \text{ MHz}$ . Para todas as curvas  $I_1 = I_2 = 50 \text{ mW/cm}^2$ .

ruído da soma  $S_{P+}(\Omega)$  (curva preta) e da diferença  $S_{P-}(\Omega)$  (curva vermelha) das intensidades dos feixes de bombeio e sonda, com intensidades incidentes iguais  $I_1 = I_2 = 50 \text{ mW/cm}^2$ , em função da dessintonia do feixe sonda  $\Delta_{L2}$ , para quatro valores diferentes de frequência de análise  $\Omega$ . Na série da Fig.4.16 apresentamos as curvas para as mesmas grandezas anteriores, desta vez usando uma frequência de análise  $\Omega = 2 \text{ MHz}$ , para quatro diferentes valores das intensidades dos campos incidentes.

Das curvas da Fig.4.15 vemos que os sinais de ruído da soma e da diferença das intensidades dos feixes de bombeio e sonda, na condição de transparência induzida eletromagneticamente, correspondem a estruturas anti-simétricas em torno da perfeita ressonância da EIT, com regiões onde os feixes estão correlacionados, anti-correlacionados e não correlacionados. Além disso, à medida que aumenta a frequência de análise, não só observamos um alargamento de ambos sinais, mas também uma maior complexidade das estruturas em torno

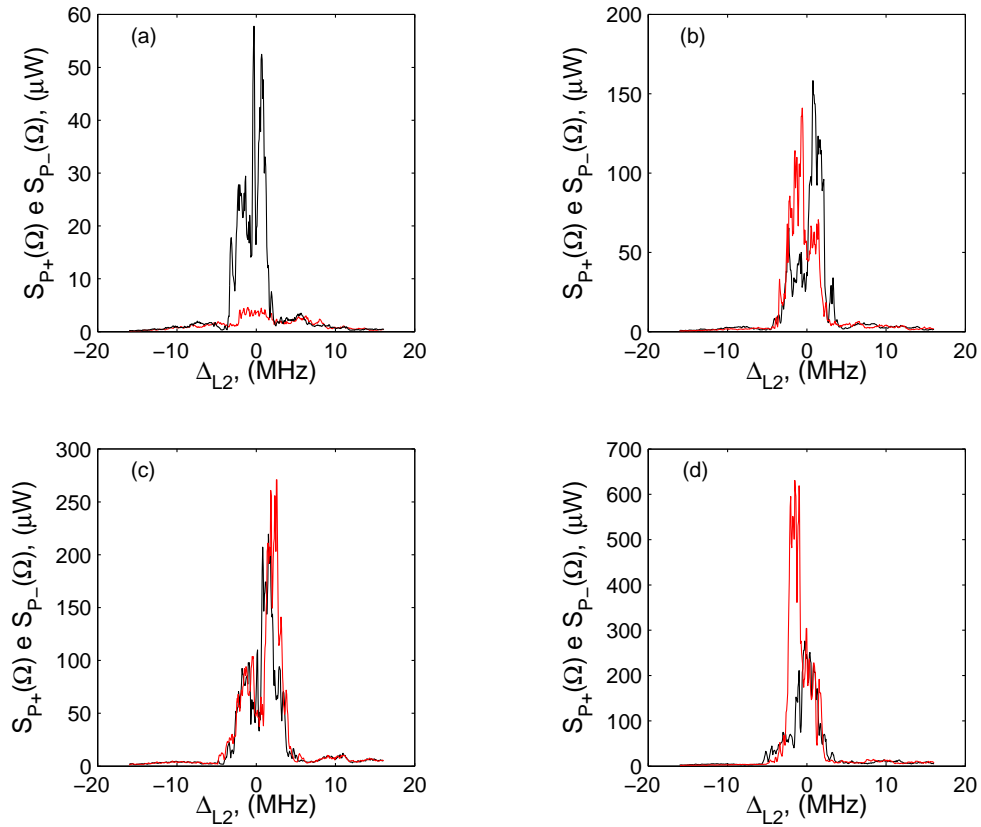


Figura 4.16: Ruído da soma  $S_{P+}(\Omega)$  (curva preta) e da diferença  $S_{P-}(\Omega)$  (curva vermelha) das intensidade dos feixes, em função da dessintonia do sonda  $\Delta_{L2}$ , para diferentes valores de intensidade dos feixes incidentes. (a)  $I_1 = I_2 = 16 \text{ mW/cm}^2$ ; (b)  $I_1 = I_2 = 50 \text{ mW/cm}^2$ ; (c)  $I_1 = I_2 = 80 \text{ mW/cm}^2$  e (d)  $I_1 = I_2 = 112 \text{ mW/cm}^2$ . Para todas as curvas  $\Omega = 2 \text{ MHz}$ .

da perfeita sintonia com o feixe sonda.

Por outro lado, a partir da Fig.4.16, vemos que para a frequência de análise escolhida e na condição de transparência induzida eletromagneticamente, para feixes com intensidades  $I_1 = I_2 = 16 \text{ mW/cm}^2$ , o sinal de ruído da diferença é muito menor do que o sinal de ruído da soma das intensidades dos feixes de modo que, para estas intensidades, inferimos o maior valor da correlação de intensidade entre os feixes de bombeio e sonda. À medida que a intensidade dos feixes aumenta, curva (b) a (d), aparecem, novamente, estruturas anti-simétrica em ambos sinais e em torno da perfeita sintonia com o feixe sonda  $\Delta_{L2} = 0$  (condição de ressonância da EIT), de modo que podemos distinguir as regiões onde os feixes estão correlacionados, anti-correlacionados e não correlacionados. Outro fato interessante que pode ser extraído dessas figuras é que a intensidade dos campos para a curva (d) é aproximadamente 10 vezes maior que a intensidade dos mesmos para a curva (a), mas a largura dos sinais é

aproximadamente a mesma, não observando um alargamento por potência significativo, como no caso da Fig.4.15. Para dessintonias do feixe sonda grandes, os campos ficam não correlacionados.

#### 4.3.8 Medida do ruído de quadratura fase de um feixe

O desenvolvimento teórico - e a implementação experimental - do uso de uma cavidade vazia para medir o ruído da quadratura fase de um feixe foi apresentado em Sec.2.5.2. Assim, implementamos essa técnica de medida em nosso laboratório e constatamos, efetivamente, que nossos lasers de diodo com cavidade estendida possuem um considerável excesso de ruído nessa quadratura.

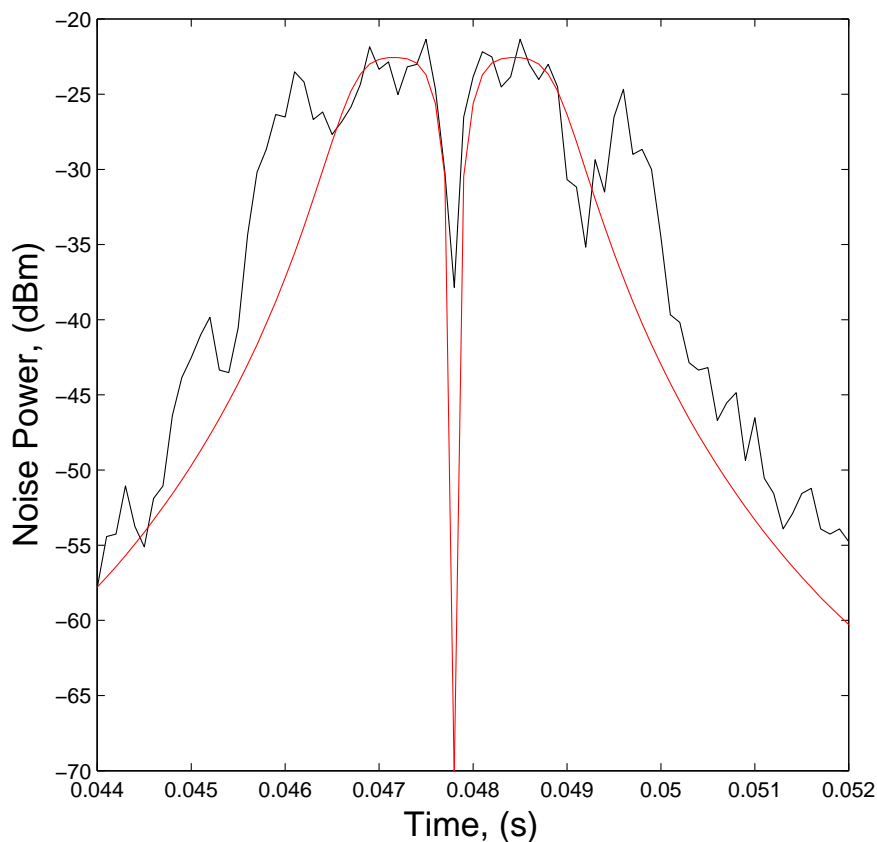


Figura 4.17: Medida de ruído no feixe refletido por uma cavidade. Os máximos de ruído correspondem a medida do ruído de quadratura fase do laser de diodo.

Na Fig.4.17, apresentamos o resultado de uma medida do ruído no feixe refletido pela cavidade (curva preta), com um ajuste teórico (curva vermelha), feita com a montagem experimental da Fig.2.3. Nessa medida, a nossa cavidade experimental era concêntrica e estava formada por dois espelhos esféricos de

raios de curvatura iguais  $R_1 = R_2 = 25 \text{ cm}$  e de coeficientes de reflexão  $\mathcal{R}_1 = 95\%$  (espelho de acoplamento) e  $\mathcal{R}_2 \approx 100\%$ , respectivamente. O intervalo espectral livre medido foi  $f_{sr} = 304 \text{ MHz}$ , com uma largura de banda  $\gamma = 3,2 \pm 0,3 \text{ MHz}$ , com perda intracavidade (porcentagem em volta completa) de  $6,3 \pm 0,7\%$  e uma finesse  $\mathcal{F} = 95$ . No Analisador de Espectros a frequência de análise foi  $\Omega = 4 \text{ MHz}$ , com largura de banda de referência  $RBW = 1 \text{ MHz}$  e uma largura de banda de vídeo  $VBW = 300 \text{ KHz}$ .

Ainda na Fig.4.17, os máximos de ruído, em torno do vale central (ruído da quadratura amplitude) correspondem à medida do ruído da quadratura fase ( $\pi/2$  e  $-\pi/2$ ) do feixe. A partir das curvas vemos, claramente, que nosso laser de diodo com cavidade estendida possui  $\approx 50 \text{ dB}$  de excesso de ruído de fase.

### 4.3.9 Medida de correlação de quadratura fase entre os campos na EIT

Tal como mencionamos na Sec.4.3.6, a finalidade de realizar uma montagem experimental com duas cavidades de análise, uma para cada feixe, é medir o ruído de fase dos campos após interagir com os átomos e na condição de transparência induzida. As cavidades de análise (uma para cada feixe após a região de interação) mostradas na montagem experimental da Fig.4.9, que permitem rodar a elipse do ruído dos campos de bombeio e sonda, são formadas por espelhos de 100% (saída) e de 95% (acoplamento) de refletividade, respectivamente e com raios de curvatura de  $25 \text{ cm}$  montados numa configuração confocal. A finesse das cavidades é de  $\approx 110$  e com larguras de banda  $BW$  de  $\approx 5 \text{ MHz}$ .

As primeiras medidas de ruído de fase dos campos e das correlações entre eles (para nosso conhecimento), na condição de EIT, foram realizadas pelo nosso grupo usando a montagem da Fig.4.9, com as cavidades descritas acima. Algumas destas medidas são apresentadas na Fig.4.18. Estas medidas foram realizadas com intensidades dos feixes incidentes iguais. Novamente os feixes de bombeio e do sonda foram estabilizados: o feixe de bombeio foi estabilizado no pico “crossover”  $^{85}\text{Rb}|5S_{1/2}, F = 3\rangle \rightarrow ^{85}\text{Rb}|5P_{3/2}, F' = 3 - 4\rangle$  e o campo sonda no pico do sinal de EIT observado na célula de vapor de Rb auxiliar. Assim, garantimos a ressonância da EIT. A amplitude de varredura das cavidades foi ajustada para que ambas “varressem” o mesmo intervalo de frequências. Durante a medida, o nível DC do controle do PZT das cavidades era ajustado manualmente para superpor os picos de transmissão das mesmas, sinais adquiridos num osciloscópio. O sinal de ruído foi adquirido no Analisador de Espectros, ajustado no modo *zero span* para uma frequência de análise  $\Omega = 10 \text{ MHz}$ , suficiente para rodar completamente a elipse de ruído dos campos.

Na Fig.4.18, apresentamos as medidas do sinal de ruído da soma  $S_{P,Q+}(\Omega)$  (curva preta) e da diferença  $S_{P,Q-}(\Omega)$  (curva vermelha) das intensidades dos feixes de bombeio e sonda em função da dessintonia das cavidades  $\Delta_c$ . Nessa

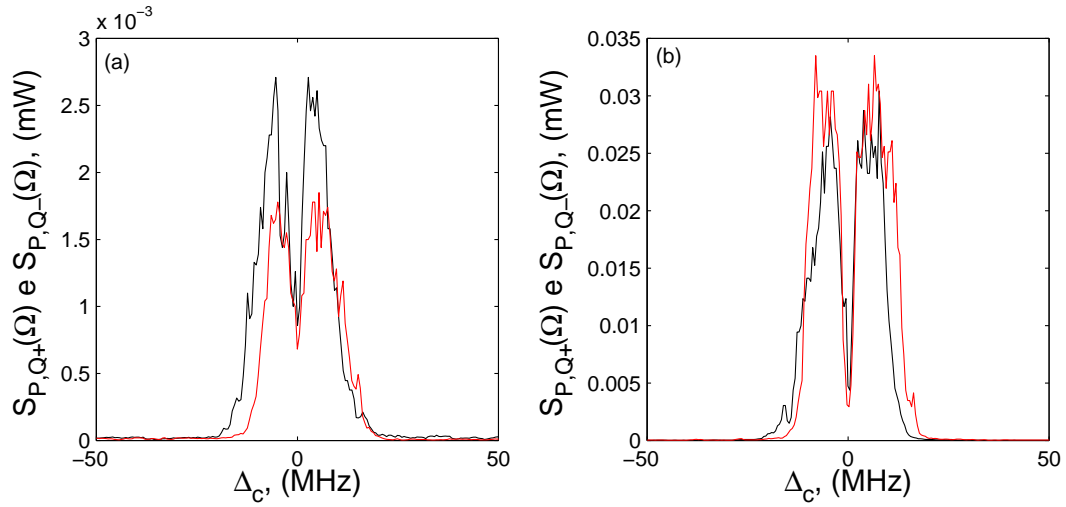


Figura 4.18: Ruído da soma  $S_{P,Q+}(\Omega)$  (curva preta) e da diferença  $S_{P,Q-}(\Omega)$  (curva azul) das intensidades e das fases dos campos, em função da dessintonia da cavidade  $\Delta_c$ , para diferentes valores da intensidade dos campos incidentes. (a)  $I_1 = I_2 = 38.6 \text{ mW/cm}^2$ ; (b)  $I_1 = I_2 = 116 \text{ mW/cm}^2$ . Para todas as curvas  $\Omega = 10 \text{ MHz}$ .

figura, para a curva (a) as intensidades incidentes dos campos eram  $I_1 = I_2 = 38,6 \text{ mW/cm}^2$  e para a curva (b),  $I_1 = I_2 = 116 \text{ mW/cm}^2$ . A partir da curva (a) inferimos que os campos apresentam correlação de intensidade, na perfeita sintonia da cavidade,  $\Delta_c = 0$ , onde o ruído da soma é maior que o ruído da diferença, e uma marcada correlação de fase (bandas laterais) em torno da perfeita sintonia da cavidade. Por outro lado, da curva (b) inferimos que os campos continuam estando correlacionados na intensidade, no entanto para fase estão anti-correlacionados, sendo neste caso o ruído da diferença maior que o da soma. No entanto, a instabilidade mecânica das cavidades, por um lado, e a não estabilização em frequência das mesma, por outro, no momento de realizar essas medidas, introduziram excesso de flutuações externas nos sinais, de modo que não foi possível obter um coeficiente de correlação normalizado.

## 4.4 Comentários finais

Diferentemente da maioria das investigações sobre os fenômenos de transparência induzida por laser, EIT, neste capítulo apresentamos os resultados experimentais das medidas do ruído - de intensidade e de fase - dos feixes de bombeio e sonda, bem como das correspondentes correlações entre ambos campos, antes e depois de interagir com uma amostra de vapor de Rb (condição de EIT).

Dentre outros, citamos os seguintes resultados:

1. Na condição de EIT, ambos campos evidenciam um excesso de ruído de intensidade. Este excesso de ruído está relacionado, por um lado, à coerência induzida pelos campos no meio atômico; equilíbrio dinâmico de troca de fótons entre os campos devido à interação com os átomos, sem afetar os valores médios das intensidades dos mesmos, mas alterando significativamente as suas propriedades estatísticas e, por outro lado, a conversão coerente - pelos átomos - de parte do excesso de ruído de fase dos feixes em ruído de intensidade.
2. Quando as intensidades dos campos são comparáveis entre si e da ordem da intensidade de saturação do meio atômico, observamos e medimos uma clara correlação no ruído de intensidade entre os campos.
3. Para intensidades dos campos muito maiores à intensidade de saturação, mas ainda comparáveis entre si, observamos e medimos uma clara anti-correlação entre o ruído de intensidade dos mesmos.
4. Além da dependência com a intensidade dos campos a correlação e anti-correlação do ruído de intensidade depende, também, da frequência de análise, sendo que a correlação se dá, preferencialmente, em frequências de análise baixas e a anti-correlação, no caso contrário.
5. Com o fim de caracterizar melhor o pico do sinal de ruído e das correlações fizemos uma varredura local em torno da sintonia do campo sonda e estudamos o comportamento do mesmo para uma dada frequência de análise e várias intensidades dos feixes incidentes, e vice versa. Os resultados obtidos mostram claramente que, o sinal de ruído do pico de EIT, apresenta estruturas internas anti-simétricas - em torno da perfeita ressonância da EIT - e complexas, com regiões intercaladas de correlação, anti-correlação e não-correlação entre os feixes.
6. Finalmente, implementamos as medidas do ruído de quadraturas dos campos usando cavidades de análise para rodar a elipse das flutuações em relação ao valor médio dos mesmos. Por meio desta medidas comprovamos que os nossos lasers possuem um excesso de ruído de fase. Além disso, realizamos as primeiras medidas de ruído de quadratura fase dos campos (e correlações), na condição de transparência induzida. Esses resultados nos mostraram que os feixes apresentam, também, correlação e anti-correlação de ruído de fase, que depende da intensidade dos campos. Com o fim de melhor caracterizarmos esses resultados, são necessários alguns testes e melhoras nas condições experimentais, como por exemplo, a estabilização mecânica e em frequência das cavidades de análise.

Os dois primeiros resultados enumerados acima motivaram o desenvolvimento de um modelo teórico que os explicasse. As primeiras previsões desse

modelo, completamente quântico, pareciam estar em bom acordo qualitativo com esses resultados experimentais, mas havendo corrigido algumas falhas detetadas na sua implementação, passou a apresentar pouco acordo com os mesmos. Além disso, não conseguiu tomar conta dos novos resultados experimentais obtidos, principalmente, o da anti-correlação de intensidade entre os feixes de bombeio e sonda na EIT. Ainda assim, este modelo idealizado deve ser testado experimentalmente, de modo que não o descartamos e é apresentado no próximo capítulo.



# Capítulo 5

## Modelo quântico para EIT

### 5.1 Introdução

No capítulo anterior apresentamos os resultados experimentais no estudo do ruído de intensidade e de fase, e das correlações, dos campos de bombeio e sonda na transparência induzida por laser, EIT.

Após medir excesso de ruído de intensidade nos feixes de bombeio e sonda, na EIT, bem como a correlação de intensidade entre os campos, nessa condição, desenvolvemos um modelo teórico para entender esses resultados [2]. Esse modelo, completamente quântico, se baseia nas Equações Quânticas de Langevin ou Equações de Heisenberg-Langevin, como também são conhecidas na literatura. A interação dos campos quânticos com os átomos de três níveis, em configuração  $\Lambda$ , é simulada no interior de uma cavidade em anel e de grande finesse, como a descrita no Apêndice C. Os campos quânticos incidentes na cavidade são tomados em estado coerente. O estudo das flutuações dos operadores é feita usando a linearização dessas flutuações em torno de seus valores médios.

Como mostrado na Ref.[2], as previsões teóricas desse modelo pareciam estar em acordo qualitativo com os resultados experimentais que o motivaram. No entanto, após uma revisão detalhada desse modelo encontramos erros de implementação, os quais uma vez corrigidos, mostraram previsões diferentes às esperadas. No decorrer deste capítulo apresentaremos esse modelo teórico corrigido, e algumas das novas previsões obtidas com a sua implementação.

### 5.2 Hamiltoniano do sistema

Tal como mencionado na introdução, neste modelo a interação dos campos e os átomos de três níveis na configuração  $\Lambda$  (estados fundamentais  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  e excitado  $|0\rangle$ ) é simulada no interior de uma cavidade em anel e de grande

finesse<sup>1</sup> com só um espelho de acoplamento usando o formalismo *input-output* [69]. O uso da cavidade neste tratamento deve-se à dificuldade para quantizar campos elétricos no espaço livre.

No estudo experimental da transparência induzida por laser, cujos resultados foram apresentados no Cap.4, os átomos - contidos numa célula de vidro a temperatura ambiente - interagem com os campos no espaço livre. Sendo assim, a cavidade que permite estudar teoricamente esse fenômeno deve satisfazer as seguintes condições:

- O campo “visto” pelos átomos na cavidade deve ter o mesmo valor e a mesma variação espacial que no experimento real e,
- a cavidade deve ser suficientemente grande de modo tal que a emissão espontânea do átomo não seja modificada.

O Hamiltoniano total do sistema átomos-campos intracavidade, do qual são derivadas as equações quânticas de Langevin do sistema, pode ser escrito, de maneira geral, da seguinte forma:

$$\widehat{\mathcal{H}}_T = \widehat{\mathcal{H}}_A + \widehat{\mathcal{H}}_{L1} + \widehat{\mathcal{H}}_{L2} + \widehat{\mathcal{H}}_{L1-R1} + \widehat{\mathcal{H}}_{L2-R2} + \widehat{\mathcal{H}}_{A-C} + \widehat{\mathcal{H}}_R + \widehat{\mathcal{H}}_{A-R}. \quad (5.1)$$

O Hamiltoniano  $\widehat{\mathcal{H}}_A$  é o Hamiltoniano do átomo livre, em ausência de qualquer radiação e na configuração  $\Lambda$ , como mostra a Fig.5.1.

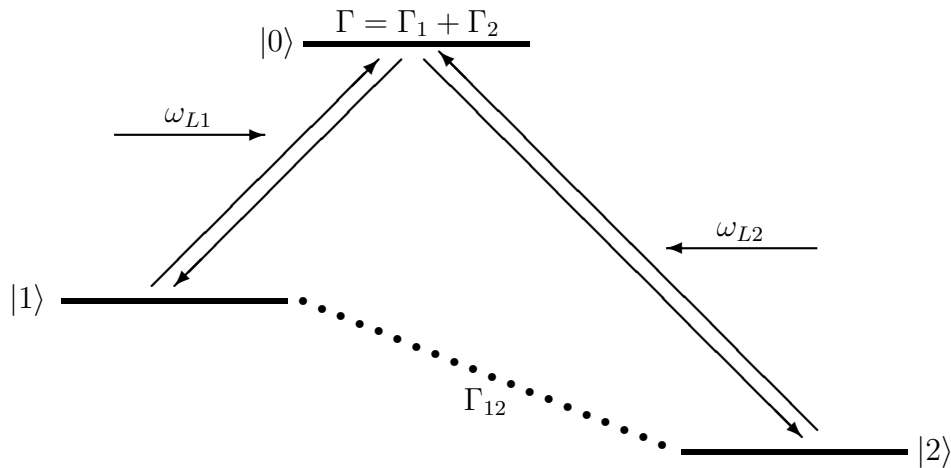


Figura 5.1: Átomo de três níveis de energia na configuração  $\Lambda$  interagindo com os campos de frequência  $\omega_{L1}$  (bombeio) e  $\omega_{L2}$  (sonda), respectivamente;  $\Gamma$ : taxa de emissão espontânea total do estado excitado;  $\Gamma_{12}$ : taxa de perda da coerência entre os estados fundamentais.

<sup>1</sup>Esta aproximação é comumente usada. Ver, por exemplo, [68].

Como podemos ver na Fig.4.1 a correspondência entre os níveis de energia da configuração  $\Lambda$ , utilizada para a derivação das equações quânticas de Langevin do sistema, estão identificados com os seguintes níveis de energia da estrutura hiperfina do  $^{85}\text{Rb}$ :

$$\begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow |5P_{3/2}, F' = 3\rangle, \\ |1\rangle &\rightarrow |5S_{1/2}, F = 3\rangle, \\ |2\rangle &\rightarrow |5S_{1/2}, F = 2\rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

O uso desses níveis de energia está permitido pela regra de seleção para o momento angular total  $F$ :

$$\Delta F = 0, \pm 1. \quad (5.3)$$

O campo sonda, de frequência central  $\omega_{L2}$ , acopla coerentemente o estado fundamental  $|2\rangle$  ao estado excitado  $|0\rangle$ ; o campo de bombeio, de frequência central  $\omega_{L1}$ , acopla coerentemente o estado fundamental  $|1\rangle$  ao mesmo estado excitado. O momento de dipolo entre os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  é considerado nulo. Para facilitar os cálculos, estes átomos são supostos imóveis. Explicitamente, tomando em conta só os graus de liberdade internos, o Hamiltoniano do  $k$ -ésimo átomo de um total de  $\mathcal{N}$  pode ser escrito como [2]:

$$\widehat{\mathcal{H}}_A^k = -\hbar\omega_1\hat{\sigma}_{11}^k - \hbar\omega_2\hat{\sigma}_{22}^k, \quad (5.4)$$

onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as frequências das transições atômicas  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$  e  $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$ , respectivamente e  $\hat{\sigma}_{11}^k = |1\rangle\langle 1|_k$  e  $\hat{\sigma}_{22}^k = |2\rangle\langle 2|_k$ , com  $k = 1, \dots, \mathcal{N}$ , os operadores das populações atômicas dos estados fundamentais considerados. Também na Eq.(5.4) tomamos como referência de energia a do nível excitado  $|0\rangle$ .

Os Hamiltonianos  $\widehat{\mathcal{H}}_{L1}$  e  $\widehat{\mathcal{H}}_{L2}$  são os Hamiltonianos dos modos livres dos campos de bombeio e sonda intracavidade, respectivamente.

Os Hamiltonianos  $\widehat{\mathcal{H}}_{L1-R1}$  e  $\widehat{\mathcal{H}}_{L2-R2}$  são os Hamiltonianos de interação linear entre o modo do campo intracavidade e o modo do campos livre, correspondente. Através destes Hamiltonianos são introduzidas as larguras de linha espectral dos campos que interagem com os átomos.

O Hamiltoniano do reservatório  $\widehat{\mathcal{H}}_R$  é tomado como um conjunto de osciladores harmônicos de frequências muito próximas.

A interação dos átomos e os campos intracavidade (bombeio e sonda) é tomada como uma interação do tipo dipolar elétrica com aproximação de onda girante a qual, para o  $k$ -ésimo átomo do conjunto, adota a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}_{A-C}^k &= \hbar g_1 \left( \hat{\sigma}_{01}^{k+} e^{-i\omega_{L1}t} \widehat{A}_1(t) + \hat{\sigma}_{01}^{k-} e^{i\omega_{L1}t} \widehat{A}_1^\dagger(t) \right) + \\ &+ \hbar g_2 \left( \hat{\sigma}_{02}^{k+} e^{-i\omega_{L2}t} \widehat{A}_2(t) + \hat{\sigma}_{02}^{k-} e^{i\omega_{L2}t} \widehat{A}_2^\dagger(t) \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde  $g_1$  e  $g_2$  são as constantes de acoplamento por fóton (frequências de Rabi).

Na interação dipolar elétrica, o Hamiltoniano de interação  $\widehat{\mathcal{H}}_I$  entre o modo do campo e os átomos é dado pela seguinte expressão:

$$\widehat{\mathcal{H}}_I = - \sum_i \widehat{\vec{d}}_i(\vec{r}, t) \cdot \widehat{\vec{E}}_{Li}(\vec{r}, t) ,$$

com  $i = 1, 2$ . Nessa expressão  $\widehat{\vec{d}}_i(\vec{r}, t)$  é o operador do momento dipolar atômico e  $\widehat{\vec{E}}_{Li}(\vec{r}, t)$  o operador do campo elétrico avaliado na posição  $\vec{r}$  do átomo. Para uma escolha adequada da origem das coordenadas, o campo elétrico é dado pela seguinte expressão:

$$\widehat{\vec{E}}_{Li}(t) = \vec{e}_{Li} \mathcal{E}_{Li} \left\{ e^{-i\omega_{Li}t} \widehat{A}_i(t) + e^{i\omega_{Li}t} \widehat{A}_i^\dagger(t) \right\} ,$$

onde  $\vec{e}_{Li}$  é a polarização do modo do campo.

Os operadores de momento de dipolo atômico são definidos pela seguinte expressão:

$$\widehat{\vec{d}}_i(t) = \widehat{D}_i [\widehat{\sigma}_{0i}^+(t) + \widehat{\sigma}_{0i}^-(t)] ,$$

onde  $\widehat{D}_i = \langle 0 | \widehat{\vec{d}}_i | i \rangle = \langle i | \widehat{\vec{d}}_i | 0 \rangle$  é o dipolo elétrico (real), associado aos estados  $|0\rangle$  e  $|i\rangle$ , respectivamente. Os operadores  $\widehat{\sigma}_{0i}^+(t) = |0\rangle\langle i|$  e  $\widehat{\sigma}_{0i}^-(t) = |i\rangle\langle 0|$  são os operadores de levantamento e rebaixamento atômicos, respectivamente.

Da análise anterior temos que o Hamiltoniano de interação se escreve como:

$$\widehat{\mathcal{H}}_I = g_i (\widehat{\sigma}_{0i}^+(t) + \widehat{\sigma}_{0i}^-(t)) \left\{ e^{-i\omega_{Li}t} \widehat{A}_i(t) + e^{i\omega_{Li}t} \widehat{A}_i^\dagger(t) \right\} ,$$

com  $i = 1, 2$  e onde  $g_i$  é a constante de acoplamento [2], dada por:

$$g_i = -\vec{e}_{Li} \cdot \widehat{D}_i \sqrt{\frac{\omega_{Li}}{2\hbar\epsilon_0 \mathcal{A} \mathcal{L}}} . \quad (5.6)$$

onde  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{L}$  são a seção transversal do feixe e o comprimento total da cavidade. A Eq.(5.5) é obtida pela aplicação da aproximação de onda girante na penúltima expressão.

Por último,  $\widehat{\mathcal{H}}_{A-R}$  corresponde ao Hamiltoniano de interação entre os átomos e os modos do reservatório. Este acoplamento é responsável pelas forças de Langevin que agem sobre os átomos.

## 5.3 Equações quânticas de Langevin dos operadores do sistema

De posse dos Hamiltonianos do sistema, o passo seguinte consiste em derivar as equações quânticas de Langevin para os operadores que o caracterizam.

### 5.3.1 Equações dos campos intracavidade

A relação entre os operadores de amplitude dos campos incidente, intracavidade e de saída, no caso de uma cavidade vazia, são desenvolvidas no Apêndice C, de onde utilizaremos os principais resultados para derivar as equações quânticas de Langevin do sistema.

Para o caso dos campos intracavidade, as dinâmicas dos operadores de aniquilação dos campos de bombeio e sonda,  $\hat{A}_1(t)$  e  $\hat{A}_2(t)$ , respectivamente, são dadas explicitamente pelas seguintes expressões:

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_1(t) = -\left(\frac{\gamma_1}{2} + i\Delta_{c1}\right)\hat{A}_1(t) + \sqrt{\frac{\gamma_1}{\tau}}\hat{A}_1^{in}(t), \quad (5.7)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_2(t) = -\left(\frac{\gamma_2}{2} + i\Delta_{c2}\right)\hat{A}_2(t) + \sqrt{\frac{\gamma_2}{\tau}}\hat{A}_2^{in}(t), \quad (5.8)$$

onde  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são as larguras de linha dos campos intracavidade respectivos;  $\Delta_{c1}$  e  $\Delta_{c2}$  as dessintonias campo de bombeio-cavidade e campo sonda-cavidade e  $\tau$  o tempo que o fóton leva para percorrer uma vez a cavidade, de comprimento total  $\mathcal{L}$ , à velocidade da luz.

Levando em conta a relação de comutação da Eq.(C.18) ( $t = t'$ ), para os operadores de amplitude dos campos de bombeio e sonda intracavidade, vemos que a dinâmica desses operadores, em presença dos átomos, é dada pelas seguintes relações:

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_1(t) = -\left(\frac{\gamma_1}{2} + i\Delta_{c1}\right)\hat{A}_1(t) - i\frac{g_1}{\tau}\hat{S}_1^-(t) + \sqrt{\frac{\gamma_1}{\tau}}\hat{A}_1^{in}(t), \quad (5.9)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_1^\dagger(t) = -\left(\frac{\gamma_1}{2} - i\Delta_{c1}\right)\hat{A}_1^\dagger(t) + i\frac{g_1}{\tau}\hat{S}_1^+(t) + \sqrt{\frac{\gamma_1}{\tau}}\hat{A}_1^{in\dagger}(t), \quad (5.10)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_2(t) = -\left(\frac{\gamma_2}{2} + i\Delta_{c2}\right)\hat{A}_2(t) - i\frac{g_2}{\tau}\hat{S}_2^-(t) + \sqrt{\frac{\gamma_2}{\tau}}\hat{A}_2^{in}(t), \quad (5.11)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_2^\dagger(t) = -\left(\frac{\gamma_2}{2} - i\Delta_{c2}\right)\hat{A}_2^\dagger(t) + i\frac{g_2}{\tau}\hat{S}_2^+(t) + \sqrt{\frac{\gamma_2}{\tau}}\hat{A}_2^{in\dagger}(t), \quad (5.12)$$

onde  $\hat{S}_1(t)[\hat{S}_1^\dagger(t)]$  e  $\hat{S}_2(t)[\hat{S}_2^\dagger(t)]$  são os operadores de polarização macroscópica

[ e seus Hermitianos conjugados] correspondentes, os quais serão definidos adiante.

Além do fator  $1/\tau$  que multiplica os correspondentes operadores de polarização, devemos notar que os operadores de amplitude intracavidade, que interagem com os átomos, têm dimensão de  $\sqrt{Hz}$ . Sendo assim, vamos reescrever as equações anteriores usando operadores de amplitude dos campos intracavidade adimensionais, dados por:

$$\widehat{B}_i(t) = \sqrt{\tau} \widehat{A}_i(t) \quad ; \quad i = 1, 2, \quad (5.13)$$

das quais, multiplicando as Eqs.(5.10-5.12) pelo fator  $\sqrt{\tau}$ , obtemos o seguinte conjunto de equações para a evolução temporal dos operadores de amplitude dos campos de bombeio e sonda, após interação com os átomos no interior da cavidade:

$$\frac{d}{dt} \widehat{B}_1(t) = - \left( \frac{\gamma_1}{2} + i\Delta_{c1} \right) \widehat{B}_1(t) - ig_1 \widehat{S}_1^-(t) + \sqrt{\gamma_1} \widehat{A}_1^{in}(t), \quad (5.14)$$

$$\frac{d}{dt} \widehat{B}_1^\dagger(t) = - \left( \frac{\gamma_1}{2} - i\Delta_{c1} \right) \widehat{B}_1^\dagger(t) + ig_1 \widehat{S}_1^+(t) + \sqrt{\gamma_1} \widehat{A}_1^{in\dagger}(t), \quad (5.15)$$

$$\frac{d}{dt} \widehat{B}_2(t) = - \left( \frac{\gamma_2}{2} + i\Delta_{c2} \right) \widehat{B}_2(t) - ig_2 \widehat{S}_2^-(t) + \sqrt{\gamma_2} \widehat{A}_2^{in}(t), \quad (5.16)$$

$$\frac{d}{dt} \widehat{B}_2^\dagger(t) = - \left( \frac{\gamma_2}{2} - i\Delta_{c2} \right) \widehat{B}_2^\dagger(t) + ig_2 \widehat{S}_2^+(t) + \sqrt{\gamma_2} \widehat{A}_2^{in\dagger}(t). \quad (5.17)$$

### 5.3.2 Equações dos operadores atômicos macroscópicos

Após a generalização para  $\mathcal{N}$  átomos das equações de evolução dos operadores atômicos de um único átomo, chegamos às seguintes equações quânticas de Langevin para os operadores atômicos macroscópicos do sistema<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \widehat{W}_1(t) = & \Gamma_1^{(1)} \widehat{W}_1(t) + \Gamma_2^{(1)} \widehat{W}_2(t) + \Gamma_3^{(1)} \mathcal{N} + 2ig_1 \widehat{B}_1^\dagger(t) \widehat{S}_1^-(t) - \\ & - 2ig_1 \widehat{B}_1(t) \widehat{S}_1^+(t) + ig_2 \widehat{B}_2^\dagger(t) \widehat{S}_2^-(t) - ig_2 \widehat{B}_2(t) \widehat{S}_2^+(t) + \\ & + \widehat{F}_{\widehat{W}_1}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\frac{d}{dt} \widehat{W}_2(t) = \Gamma_1^{(2)} \widehat{W}_1(t) + \Gamma_2^{(2)} \widehat{W}_2(t) + \Gamma_3^{(2)} \mathcal{N} + ig_1 \widehat{B}_1^\dagger(t) \widehat{S}_1^-(t) -$$

<sup>2</sup>Um detalhado desenvolvimento das equações desta seção se encontram na Ref.[2]

$$\begin{aligned}
 & -ig_1\widehat{B}_1(t)\widehat{S}_1^+(t) + 2ig_2\widehat{B}_2^\dagger(t)\widehat{S}_2^-(t) - 2ig_2\widehat{B}_2(t)\widehat{S}_2^+(t) + \\
 & + \widehat{F}_{\widehat{W}_2}(t) ,
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\widehat{S}_1^-(t) &= ig_1\widehat{W}_1(t)\widehat{B}_1(t) - \left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - i\Delta_{L1}\right)\widehat{S}_1^-(t) - \\
 & - ig_2\widehat{S}_{12}^+(t)\widehat{B}_2(t) + \widehat{F}_{\widehat{S}_1}(t) ,
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\widehat{S}_1^+(t) &= -ig_1\widehat{W}_1(t)\widehat{B}_1^\dagger(t) - \left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + i\Delta_{L1}\right)\widehat{S}_1^+(t) + \\
 & + ig_2\widehat{S}_{12}^-(t)\widehat{B}_2^\dagger(t) + \widehat{F}_{\widehat{S}_1}^\dagger(t) ,
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\widehat{S}_2^-(t) &= ig_2\widehat{W}_2(t)\widehat{B}_2(t) - \left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - i\Delta_{L2}\right)\widehat{S}_2^-(t) - \\
 & - ig_1\widehat{S}_{12}^-(t)\widehat{B}_1(t) + \widehat{F}_{\widehat{S}_2}(t) ,
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\widehat{S}_2^+(t) &= -ig_2\widehat{W}_2(t)\widehat{B}_2^\dagger(t) - \left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + i\Delta_{L2}\right)\widehat{S}_2^+(t) + \\
 & + ig_1\widehat{S}_{12}^+(t)\widehat{B}_1^\dagger(t) + \widehat{F}_{\widehat{S}_2}^\dagger(t) ,
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\widehat{S}_{12}^-(t) &= ig_2\widehat{S}_1^+(t)\widehat{B}_2(t) - ig_1\widehat{S}_2^-(t)\widehat{B}_1^\dagger(t) - (\Gamma_{12} + i\Delta_R)\widehat{S}_{12}^-(t) + \\
 & + \widehat{F}_{\widehat{S}_{12}}(t) ,
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\widehat{S}_{12}^+(t) &= -ig_2\widehat{S}_1^-(t)\widehat{B}_2^\dagger(t) + ig_1\widehat{S}_2^+(t)\widehat{B}_1(t) - (\Gamma_{12} - i\Delta_R)\widehat{S}_{12}^+(t) + \\
 & + \widehat{F}_{\widehat{S}_{12}}^\dagger(t) .
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Na derivação das Eqs.(5.18-5.25) foram introduzidas as dessintonias entre as frequências de oscilação dos campos de bombeio e sonda e as frequências das transições atômicas correspondentes ( $\Delta_{L1} = \omega_{L1} - \omega_1$  e  $\Delta_{L2} = \omega_{L2} - \omega_2$ ); a dessintonia Raman ( $\Delta_R = \Delta_{L1} - \Delta_{L2}$ ), a taxa de perda da coerência ( $\Gamma_{12}$ ) entre os estados fundamentais e as taxas de transferência de população do estado  $|1\rangle$  ao estado  $|2\rangle$ , e vice versa,  $\Gamma_{1\rightarrow 2}$  e  $\Gamma_{2\rightarrow 1}$ , respectivamente. Os operadores macroscópicos do sistema correspondem à somatória dos operadores lentamente variáveis do sistema, por exemplo:

$$\tilde{\sigma}_{00}^k(t) = \hat{\sigma}_{00}^k(t) \rightarrow \widehat{P}_0(t) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \tilde{\sigma}_{00}^k(t) , \tag{5.26}$$

$$\tilde{\sigma}_{01}^{k+}(t) = \hat{\sigma}_{01}^{k+}(t)e^{-i\omega_{L1}t} \rightarrow \widehat{S}_1^+(t) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \tilde{\sigma}_{01}^{k+}(t) , \quad (5.27)$$

$$\tilde{\sigma}_{12}^{k-}(t) = \hat{\sigma}_{12}^{k-}(t)e^{i(\omega_{L2}-\omega_{L1})t} \rightarrow \widehat{S}_1^-(t) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \tilde{\sigma}_{12}^{k-}(t) , \quad (5.28)$$

para citar alguns.

Além das definições anteriores, utilizamos a condição de normalização:

$$\widehat{P}_0(t) + \widehat{P}_1(t) + \widehat{P}_2(t) = \mathcal{N} \quad (5.29)$$

e introduzimos os operadores de inversão de população através das seguintes relações:

$$\widehat{W}_1(t) = \widehat{P}_0(t) - \widehat{P}_1(t) \quad \text{e} \quad \widehat{W}_2(t) = \widehat{P}_0(t) - \widehat{P}_2(t) . \quad (5.30)$$

Por último, os parâmetros dissipativos que aparecem nas equações são dados, explicitamente, pelas seguintes relações:

$$\Gamma_1^{(1)} = -\frac{1}{3}(2\Gamma_1 + \Gamma_2) - \frac{2}{3}\Gamma_{1 \rightarrow 2} - \frac{1}{3}\Gamma_{2 \rightarrow 1} , \quad (5.31)$$

$$\Gamma_2^{(1)} = -\frac{1}{3}(2\Gamma_1 + \Gamma_2) + \frac{1}{3}\Gamma_{1 \rightarrow 2} + \frac{2}{3}\Gamma_{2 \rightarrow 1} , \quad (5.32)$$

$$\Gamma_3^{(1)} = -\frac{1}{3}(2\Gamma_1 + \Gamma_2) + \frac{1}{3}\Gamma_{1 \rightarrow 2} - \frac{1}{3}\Gamma_{2 \rightarrow 1} , \quad (5.33)$$

$$\Gamma_1^{(2)} = -\frac{1}{3}(\Gamma_1 + 2\Gamma_2) + \frac{2}{3}\Gamma_{1 \rightarrow 2} + \frac{1}{3}\Gamma_{2 \rightarrow 1} , \quad (5.34)$$

$$\Gamma_2^{(2)} = -\frac{1}{3}(\Gamma_1 + 2\Gamma_2) - \frac{1}{3}\Gamma_{1 \rightarrow 2} - \frac{2}{3}\Gamma_{2 \rightarrow 1} , \quad (5.35)$$

$$\Gamma_3^{(2)} = -\frac{1}{3}(\Gamma_1 + 2\Gamma_2) - \frac{1}{3}\Gamma_{1 \rightarrow 2} + \frac{1}{3}\Gamma_{2 \rightarrow 1} . \quad (5.36)$$

## 5.4 Estado estacionário e flutuações quânticas

O conjunto de equações que governa a dinâmica do sistema acoplado átomos-campos intracavidade, Eqs.(5.14-5.17) para os operadores de amplitude dos campos intracavidade e Eqs.(5.18-5.25) para os operadores atômicos macroscópicos, é utilizado para obter as previsões teóricas tanto dos valores médios quanto de suas flutuações em torno desses valores.



Utilizando a habitual linearização das flutuações dos operadores em torno de seus valores médios, as equações de evolução dos operadores do sistema são separadas em dois conjuntos de equações: um grupo contendo só os valores médios dos operadores e outro contendo só as flutuações dos mesmos. O tratamento de cada um desses conjuntos é apresentado a seguir.

### 5.4.1 Valores médios dos operadores no estado estacionário

Os valores médios dos operadores atômicos do sistema são calculados no estado estacionário. Neste cálculo assume-se conhecidos e reais os valores médios das amplitudes dos feixes intracavidade. Neste caso as equações permanecem válidas mesmo quando as flutuações são comparáveis aos valores médios e elas têm a forma das equações óticas de Bloch [68]. Em forma matricial, os valores médios dos operadores atômicos no estado estacionário satisfazem a seguinte equação:

$$\mathbf{A}_{\text{at.}} \cdot \mathbf{X}_{\text{at.}} = \mathbf{V} , \quad (5.37)$$

onde  $\mathbf{X}_{\text{at.}}$  é o vetor formado pelos valores médios dos operadores atômicos no estado estacionário, dado explicitamente pela seguinte expressão:

$$\mathbf{X}_{\text{At.}} = \begin{pmatrix} \langle \widehat{W}_1(t) \rangle_{ee} \equiv w_1 \\ \langle \widehat{W}_2(t) \rangle_{ee} \equiv w_2 \\ \langle \widehat{S}_1^-(t) \rangle_{ee} \equiv s_1 \\ \langle \widehat{S}_1^+(t) \rangle_{ee} \equiv s_1^* \\ \langle \widehat{S}_2^-(t) \rangle_{ee} \equiv s_2 \\ \langle \widehat{S}_2^+(t) \rangle_{ee} \equiv s_2^* \\ \langle \widehat{S}_{12}^-(t) \rangle_{ee} \equiv s_{12} \\ \langle \widehat{S}_{12}^+(t) \rangle_{ee} \equiv s_{12}^* \end{pmatrix} . \quad (5.38)$$

$\mathbf{A}_{\text{at.}}$  é uma matriz  $8 \times 8$  cujos elementos são funções das dessintonias, taxas de relaxação etc. e dos valores médios das amplitudes dos feixes de bombeio e sonda intracavidade no estado estacionário,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , respectivamente. Esta matriz é obtida a partir das seguintes equações.

$$\begin{aligned} -\Gamma_3^{(1)} \mathcal{N} = & \Gamma_1^{(1)} w_1 + \Gamma_2^{(1)} w_2 + 2ig_1 \beta_1^* s_1 - 2ig_1 \beta_1 s_1^* + \\ & + ig_2 \beta_2^* s_2 - ig_2 \beta_2 s_2^* , \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$-\Gamma_3^{(2)} \mathcal{N} = \Gamma_1^{(2)} w_1 + \Gamma_2^{(2)} w_2 + ig_1 \beta_1^* s_1 - ig_1 \beta_1 s_1^* + 2ig_2 \beta_2^* s_2 - 2ig_2 \beta_2 s_2^* , \quad (5.40)$$

$$0 = ig_1 \beta_1 w_1 - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - i\Delta_{L1} \right) s_1 - ig_2 \beta_2 s_{12}^* , \quad (5.41)$$

$$0 = -ig_1 \beta_1^* w_1 - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + i\Delta_{L1} \right) s_1^* + ig_2 \beta_2^* s_{12} , \quad (5.42)$$

$$0 = ig_2 \beta_2 w_2 - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - i\Delta_{L2} \right) s_2 - ig_1 \beta_1 s_{12} , \quad (5.43)$$

$$0 = -ig_2 \beta_2^* w_2 - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + i\Delta_{L2} \right) s_2^* + ig_1 \beta_1^* s_{12} , \quad (5.44)$$

$$0 = ig_2 \beta_2 s_1^* - ig_1 \beta_1^* s_2 - (\Gamma_{12} + i\Delta_R) s_{12} , \quad (5.45)$$

$$0 = -ig_2 \beta_2^* s_1 + ig_1 \beta_1 s_2^* - (\Gamma_{12} - i\Delta_R) s_{12}^* . \quad (5.46)$$

Por último, o vetor  $\mathbf{V}$  é dado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{V} = \left( -\Gamma_3^{(1)} \mathcal{N} \quad -\Gamma_3^{(2)} \mathcal{N} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T . \quad (5.47)$$

A solução da Eq.(5.37) é obtida de maneira direta invertendo a matriz  $\mathbf{A}_{\text{at}}$  e multiplicando-a pelo vetor  $\mathbf{V}$ , ou seja:

$$\mathbf{X}_{\text{At.}} = \mathbf{A}_{\text{At.}}^{-1} \cdot \mathbf{V} . \quad (5.48)$$

## 5.4.2 Flutuações e ruído quântico

O estudo do ruído das quadraturas amplitude e fase dos feixes de bombeio e sonda, bem como as correlações entre ambos, é feito através das equações que descrevem as flutuações dos operadores do sistema e, como já mencionamos anteriormente, resultam da linearização das flutuações dos operadores em torno de seus valores médios no estado estacionário. Na linearização destas equações aparecem termos, como por exemplo,  $2ig_1 \delta \widehat{B}_1^\dagger(t) \delta \widehat{S}_1^-(t)$ , que são desprezados por serem de segunda ordem nas flutuações e pequenos quando comparados com as correspondentes expressões para os valores médios,  $2ig_1 \beta_1^* s_1$ .

A dinâmica das flutuações dos operadores do sistema é descrita em forma matricial pela seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} \delta \widehat{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}_s \delta \widehat{\mathbf{Z}}(t) + \widehat{\mathcal{F}}(t) , \quad (5.49)$$

onde  $\delta\widehat{\mathbf{Z}}(t)$  é o vetor que contém os operadores de flutuação, dado por:

$$\delta\widehat{\mathbf{Z}}(t) = \left( \delta\widehat{W}_1(t), \delta\widehat{W}_2(t), \delta\widehat{S}_1^-(t), \delta\widehat{S}_1^+(t), \delta\widehat{S}_2^-(t), \delta\widehat{S}_2^+(t), \right. \\ \left. \delta\widehat{S}_{12}^-(t), \delta\widehat{S}_{12}^+(t), \delta\widehat{B}_1(t), \delta\widehat{B}_1^\dagger(t), \delta\widehat{B}_2(t), \delta\widehat{B}_2^\dagger(t) \right)^T. \quad (5.50)$$

A matriz  $\mathbf{A}_s$  é composta pelos valores médios dos operadores do sistema no estado estacionário, bem como pelas dessintonias, taxas de relaxação etc. O vetor  $\widehat{\mathcal{F}}(t)$  é o operador vetor das forças de Langevin, dado por:

$$\widehat{\mathcal{F}}(t) = \left( \widehat{F}_{\widehat{W}_1}(t), \widehat{F}_{\widehat{W}_2}(t), \widehat{F}_{\widehat{S}_1}(t), \widehat{F}_{\widehat{S}_1}^\dagger(t), \widehat{F}_{\widehat{S}_2}(t), \widehat{F}_{\widehat{S}_2}^\dagger(t), \right. \\ \left. \widehat{F}_{\widehat{S}_{12}}(t), \widehat{F}_{\widehat{S}_{12}}^\dagger(t), \widehat{F}_{\widehat{B}_1}(t), \widehat{F}_{\widehat{B}_1}^\dagger(t), \widehat{F}_{\widehat{B}_2}(t), \widehat{F}_{\widehat{B}_2}^\dagger(t) \right)^T. \quad (5.51)$$

No espaço de frequências a solução da Eq.(5.49) se escreve da seguinte forma:

$$\delta\widehat{\mathbf{Z}}(\Omega) = - \left[ \mathbf{A}_s + i\Omega\mathbf{I} \right]^{-1} \widehat{\mathcal{F}}(\Omega), \quad (5.52)$$

onde  $\Omega$  e  $\mathbf{I}$  são a frequência de análise e a matriz identidade, respectivamente.

A função de auto-correlação do vetor com os operadores de flutuação obtém-se diretamente da Eq.(5.52). Explicitamente, ela é dada pela seguinte expressão:

$$\langle \delta\widehat{\mathbf{Z}}(\Omega) \delta\widehat{\mathbf{Z}}^\dagger(\Omega') \rangle = 2\pi\delta(\Omega + \Omega') \left[ \mathbf{A}_s + i\Omega\mathbf{I} \right]^{-1} \mathcal{D}_s \left[ \mathbf{A}_s - i\Omega\mathbf{I} \right]^{-1}, \quad (5.53)$$

onde  $\mathcal{D}_s$  é a matriz de difusão do sistema, dada pela seguinte relação:

$$\langle \widehat{\mathcal{F}}(\Omega) \widehat{\mathcal{F}}^\dagger(\Omega') \rangle = 2\pi\delta(\Omega + \Omega') \mathcal{D}_s. \quad (5.54)$$

Lembrando que a densidade espectral do ruído é definida como a transformada de Fourier da função de auto-correlação, da Eq.(5.53) e do Apêndice A, encontramos a seguinte expressão para a matriz de densidade espectral do ruído do sistema:

$$\mathbf{S}(\Omega) = \left[ \mathbf{A}_s + i\Omega\mathbf{I} \right]^{-1} \mathcal{D}_s \left[ \mathbf{A}_s - i\Omega\mathbf{I} \right]^{-1}. \quad (5.55)$$

Dado que as forças de Langevin que agem sobre os operadores dos campos intracavidade são independentes das forças de Langevin que agem sobre os operadores atômicos, a matriz de difusão do sistema é uma matriz diagonal por blocos.

No caso dos campos, considera-se que as fontes geradoras dos mesmos são independentes uma da outra e que ambas geram um estado coerente de modo tal que a matriz de difusão dos campos intracavidade se escreve da seguinte forma:

$$\mathcal{D}_{\text{campos}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.56)$$

A matriz de difusão dos operadores atômicos é determinada a partir da *Relação Generalizada de Einstein* e os cálculos desses elementos são apresentados no Apêndice D.

Dado que experimentalmente temos acesso ao campo que sai da cavidade, vamos desenvolver as expressões que nos permitem calcular o ruído das quadraturas amplitude e fase dos campos de bombeio e sonda detetados. Das relações *input-output*, as flutuações dos operadores de amplitude do campo de saída da cavidade e no espaço de frequências, se escrevem de modo geral:

$$\delta\hat{A}_i^s(\Omega) = \sqrt{\gamma_i}\delta\hat{B}_i(\Omega) - \delta\hat{A}_i^{in}(\Omega), \quad (5.57)$$

$$\delta\hat{A}_i^{s\dagger}(\Omega) = \sqrt{\gamma_i}\delta\hat{B}_i^\dagger(\Omega) - \delta\hat{A}_i^{in}(\Omega), \quad (5.58)$$

com  $i = 1, 2$  e onde fizemos uso da Eq.(5.13).

Desenvolvendo as Eq.(5.14-5.17) para os operadores de flutuação no espaço de frequências, encontramos as seguintes expressões generalizadas para os operadores de flutuação dos campos incidentes:

$$\delta\hat{A}_i^{in}(\Omega) = \left[ \frac{\sqrt{\gamma_i}}{2} + \frac{i(\Delta_{ci} - \Omega)}{\sqrt{\gamma_i}} \right] \delta\hat{B}_i(\Omega) + i \frac{g_i}{\sqrt{\gamma_i}} \delta\hat{S}_i^-(\Omega), \quad (5.59)$$

$$\delta\hat{A}_i^{in\dagger}(\Omega) = \left[ \frac{\sqrt{\gamma_i}}{2} - \frac{i(\Delta_{ci} + \Omega)}{\sqrt{\gamma_i}} \right] \delta\hat{B}_i^\dagger(\Omega) - i \frac{g_i}{\sqrt{\gamma_i}} \delta\hat{S}_i^+(\Omega), \quad (5.60)$$

com  $i = 1, 2$ .

Substituindo a Eq.(5.59) na Eq.(5.57) e a Eq.(5.60) na Eq.(5.58), encontramos as seguintes expressões para os operadores de flutuação das amplitudes dos campos de saída da cavidade:

$$\delta\hat{A}_i^s(\Omega) = \zeta_i^{(1)}(\Omega)\delta\hat{B}_i(\Omega) - i \frac{g_i}{\sqrt{\gamma_i}} \delta\hat{S}_i^-(\Omega), \quad (5.61)$$

$$\delta\widehat{A}_i^{s\dagger}(\Omega) = \zeta_i^{(2)}(\Omega)\delta\widehat{B}_i^\dagger(\Omega) + i\frac{g_i}{\sqrt{\gamma_i}}\delta\widehat{S}_i^+(\Omega), \quad (5.62)$$

onde as funções  $\zeta_i^{(1)}(\Omega)$  e  $\zeta_i^{(2)}(\Omega)$  são dadas explicitamente pelas seguintes expressões:

$$\zeta_i^{(1)}(\Omega) = \left[ \frac{\sqrt{\gamma_i}}{2} - \frac{i(\Delta_{ci} - \Omega)}{\sqrt{\gamma_i}} \right], \quad (5.63)$$

$$\zeta_i^{(2)}(\Omega) = \left[ \frac{\sqrt{\gamma_i}}{2} + \frac{i(\Delta_{ci} + \Omega)}{\sqrt{\gamma_i}} \right], \quad (5.64)$$

respectivamente.

Quando os campos intracavidade estão ressonantes com o modo da cavidade  $\Delta_{ci} = 0$ , temos  $\zeta_i^{(1)}(\Omega) = \zeta_i^{(2)}(\Omega) = \zeta_i(\Omega)$  dado por:

$$\zeta_i(\Omega) = \left[ \frac{\sqrt{\gamma_i}}{2} + i\frac{\Omega}{\sqrt{\gamma_i}} \right]. \quad (5.65)$$

Neste ponto, escrevemos a Eq.(2.92) para os operadores de flutuação dos campos que saem da cavidade. A partir das equações anteriores, calculamos os valores médios dos produtos correspondentes e derivamos as equações que nos permitem calcular o ruído do campo de bombeio  $V_1^s(\Omega, \theta)$  e do campo sonda  $V_2^s(\Omega, \phi)$  detetados, bem como os das covariâncias  $V_{12}^s(\Omega, \theta, \phi)$  e  $V_{21}^s(\Omega, \phi, \theta)$  entre eles.

Explicitamente, as variâncias ou ruídos normalizados dos feixes de bombeio e sonda detetados são dados pelas seguintes expresões<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} V_1^s(\Omega, \theta) = & \zeta_1(\Omega)\zeta_1(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,9} + i\frac{\zeta_1(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,3} - \\ & - i\frac{\zeta_1(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,9} + \frac{g_1^2}{\gamma_1}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,3} + \zeta_1(\Omega)\zeta_1(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,10} - \\ & - i\frac{\zeta_1(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,4} + i\frac{\zeta_1(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,10} + \frac{g_1^2}{\gamma_1}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,4} + \\ & + 2\Re e \left\{ \left[ \zeta_1(\Omega)\zeta_1(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,10} - i\frac{\zeta_1(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,4} - \right. \right. \\ & \left. \left. - i\frac{\zeta_1(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,10} - \frac{g_1^2}{\gamma_1}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,4} \right] e^{-2i\theta} \right\}, \quad (5.66) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Os termos  $[\mathbf{S}(\Omega)]_{m,n}$  que aparecem nas Eqs.(5.66–5.69), são elementos da matriz  $12 \times 12$  da Eq.(5.55). Por exemplo,  $[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,3} = \langle \delta\widehat{B}_1(\Omega)\delta\widehat{S}_1^+(-\Omega) \rangle$ , que corresponde a um dos termos da multiplicação das Eqs.(5.61) e Eqs.(5.62), com  $i = 1$ .

$$\begin{aligned}
V_2^s(\Omega, \phi) = & \zeta_2(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{11,11} + i\frac{\zeta_2(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{11,5} - \\
& - i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{5,11} + \frac{g_2^2}{\gamma_2}[\mathbf{S}(\Omega)]_{5,5} + \zeta_2(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{12,12} - \\
& - i\frac{\zeta_2(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{12,6} + i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{6,12} + \frac{g_2^2}{\gamma_2}[\mathbf{S}(\Omega)]_{6,6} + \\
& + 2\Re e \left\{ \left[ \zeta_2(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{11,12} - i\frac{\zeta_2(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{11,6} - \right. \right. \\
& \left. \left. - i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{5,12} - \frac{g_2^2}{\gamma_2}[\mathbf{S}(\Omega)]_{5,6} \right] e^{-2i\phi} \right\}, \tag{5.67}
\end{aligned}$$

e as covariâncias entre eles, por:

$$\begin{aligned}
V_{12}^s(\Omega, \theta, \phi) = & \left\{ \zeta_1(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,11} + i\frac{\zeta_1(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,5} - \right. \\
& \left. - i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,11} + \frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,5} \right\} e^{-i(\theta-\phi)} \\
& + \left\{ \zeta_1(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,12} - i\frac{\zeta_1(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,6} + \right. \\
& \left. + i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,12} + \frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,6} \right\} e^{i(\theta-\phi)} \\
& + \left\{ \zeta_1(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,12} - i\frac{\zeta_1(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,6} - \right. \\
& \left. - i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,12} - \frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,6} \right\} e^{-i(\theta+\phi)} \\
& + \left\{ \zeta_1(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,11} + i\frac{\zeta_1(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,5} + \right. \\
& \left. + i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,11} - \frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,5} \right\} e^{i(\theta+\phi)} \tag{5.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{21}^s(\Omega, \phi, \theta) = & \left\{ \zeta_2(\Omega)\zeta_1(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{11,9} + i\frac{\zeta_2(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{11,3} - \right. \\
& \left. - i\frac{\zeta_1(-\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{5,9} + \frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{5,3} \right\} e^{-i(\phi-\theta)} \\
& + \left\{ \zeta_2(\Omega)\zeta_1(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{12,10} - i\frac{\zeta_2(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{12,4} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i \frac{\zeta_1(-\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}} [\mathbf{S}(\Omega)]_{6,10} + \frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} [\mathbf{S}(\Omega)]_{6,4} \Big\} e^{i(\phi-\theta)} \\
& + \left\{ \zeta_2(\Omega)\zeta_1(-\Omega) [\mathbf{S}(\Omega)]_{11,10} - i \frac{\zeta_2(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}} [\mathbf{S}(\Omega)]_{11,4} - \right. \\
& \quad \left. - i \frac{\zeta_1(-\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}} [\mathbf{S}(\Omega)]_{5,10} - \frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} [\mathbf{S}(\Omega)]_{5,4} \right\} e^{-i(\phi+\theta)} \\
& + \left\{ \zeta_2(\Omega)\zeta_1(-\Omega) [\mathbf{S}(\Omega)]_{12,9} + i \frac{\zeta_2(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}} [\mathbf{S}(\Omega)]_{12,3} + \right. \\
& \quad \left. + i \frac{\zeta_1(-\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}} [\mathbf{S}(\Omega)]_{6,9} - \frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} [\mathbf{S}(\Omega)]_{6,3} \right\} e^{i(\theta+\phi)}. \quad (5.69)
\end{aligned}$$

Experimentalmente temos acesso ao ruído de intensidade (proporcional ao ruído da quadratura amplitude) de cada um dos campos, bem como ao ruído da soma e da diferença de intensidades entre ambos. Sendo assim, vamos definir a seguinte função que nos permite calcular o ruído da soma de intensidades entre os feixes de bombeio e sonda detetados:

$$\begin{aligned}
V_+^s(\Omega, \theta, \phi) &= \left\langle \left( \delta\widehat{Y}_{1,\theta}^{out}(\Omega) + \delta\widehat{Y}_{2,\phi}^{out}(\Omega) \right)^2 \right\rangle \\
&= \langle (\delta\widehat{Y}_{1,\theta}^{out}(\Omega)\delta\widehat{Y}_{1,\theta}^{out}(-\Omega))^2 \rangle + \langle (\delta\widehat{Y}_{2,\phi}^{out}(\Omega)\delta\widehat{Y}_{2,\phi}^{out}(-\Omega))^2 \rangle + \\
&\quad + \langle \delta\widehat{Y}_{1,\theta}^{out}(\Omega)\delta\widehat{Y}_{2,\phi}^{out}(-\Omega) \rangle + \langle \delta\widehat{Y}_{2,\phi}^{out}(\Omega)\delta\widehat{Y}_{1,\theta}^{out}(-\Omega) \rangle \\
&= V_1^s(\Omega, \theta) + V_2^s(\Omega, \phi) + V_{12}^s(\Omega, \theta, \phi) + V_{21}^s(\Omega, \phi, \theta). \quad (5.70)
\end{aligned}$$

Fazendo uma análise similar para o caso do ruído da diferença de intensidade entre os campos, obtemos a seguinte expressão:

$$V_-^s(\Omega, \theta, \phi) = V_1^s(\Omega, \theta) + V_2^s(\Omega, \phi) - V_{12}^s(\Omega, \theta, \phi) - V_{21}^s(\Omega, \phi, \theta). \quad (5.71)$$

Por último, derivamos a seguinte expressão que nos permite calcular o coeficiente de correlação entre os feixes de bombeio e sonda detetados:

$$\mathcal{C}_{\theta,\phi}^s(\Omega) = \frac{V_+^s(\Omega, \theta, \phi) - V_-^s(\Omega, \theta, \phi)}{V_+^s(\Omega, \theta, \phi) + V_-^s(\Omega, \theta, \phi)} \times \frac{V_1^s(\Omega, \theta) + V_2^s(\Omega, \phi)}{\sqrt{4(V_1^s(\Omega, \theta) V_2^s(\Omega, \phi))}}, \quad (5.72)$$

cujos valores estão restritos ao intervalo  $[-1, 1]$ .

Com essas equações, realizamos previsões teóricas em condições que procuram se assemelhar às experimentais. Os resultados são apresentados a seguir.

## 5.5 Previsões teóricas

Os primeiros resultados teóricos com o modelo descrito nesta seção podem ser encontrados nas Refs.[2, 3]. No entanto, tal como foi mencionado na introdução deste capítulo, após um minucioso estudo percebemos um erro no

cálculo das correlações entre as forças atômicas de Langevin. Este erro consistiu, basicamente, em calcular essas correlações após a linearização das equações quânticas de Langevin do sistema, o que levou a calcular produtos de valores médios de operadores e não valores médios de produtos de operadores, como deve ser [70]. Além disso, esses resultados foram obtidos numa região onde há instabilidade das soluções para as flutuações, ou seja, existem autovalores da matriz total do sistema  $\mathbf{A}_S$  com a parte real positiva (ver mais adiante).

Um vez consertadas essas falhas recalculamos as previsões teóricas obtidas com este modelo para os valores médios dos operadores atômicos no estado estacionário, principalmente para as polarizações macroscópicas, por um lado, e para o ruído das quadraturas amplitude e fase dos feixes de bombeio e sonda detetados, bem como para as correlações entre elas, por outro.

### 5.5.1 Parâmetros usados

Como unidade de frequência nos cálculos usamos a largura natural do estado excitado do  $^{85}\text{Rb}$   $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = 2\pi \times (6 \text{ MHz})$ . Dado que os níveis  $|5S_{1/2}, F = 3\rangle$  e  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$  correspondem aos estados fundamentais do  $^{85}\text{Rb}$ , tomamos eles radiativamente estáveis.

Vamos supor que o comprimento total da cavidade  $\mathcal{L}$  é de  $0,3 \text{ m}$  e possui um único espelho de acoplamento de elevado coeficiente de reflexão. Do valor do comprimento total da cavidade e do valor da velocidade da luz no vácuo vemos que o tempo  $\tau$  que o fóton leva para percorrer-la é de  $1 \text{ ns}$ , de onde podemos ver que o intervalo espectral livre da cavidade (fsr: free spectral range) é de  $1 \text{ GHz}$ . A largura de linha dos campos intracavidade  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , em unidades de frequência angular, é de  $2\pi \times (1 \text{ MHz})$ . Disto e do valor do intervalo espectral livre da cavidade, inferimos que a finesse  $\mathcal{F}$  da mesma é 1000.

Os valores das constantes de acoplamento  $g_1$  e  $g_2$  que usamos para os cálculos teóricos são os seguintes:

$$g_1 = (-4,63 \times 10^{-3}) \times \Gamma \quad \text{e} \quad g_2 = (-4,14 \times 10^{-3}) \times \Gamma. \quad (5.73)$$

O cálculos explícito destes valores, usando a intensidade das linhas espectrais correspondentes, estão no Apêndice C da Ref.[2], onde considera-se que tanto o feixe de bombeio quanto o feixe sonda são linearmente polarizados e têm seção transversal circular constante, com  $1 \text{ mm}$  de diâmetro.

O valor da taxa de perda de coerência entre os estados fundamentais  $\Gamma_{12}$  é de  $100 \text{ kHz}$  e foi escolhido de modo que fosse possível observar o sinal de transparência induzida no nível DC. Na experiência real esse valor depende, dentre outros fatores, da temperatura da célula que contém os átomos, das características das paredes da célula, do tempo de voo dos átomos através da seção transversal do feixe etc.



## 5.5.2 Estado estacionário

Antes de apresentar as previsões teóricas para os valores médios no estado estacionário das polarizações macroscópicas na condição de EIT, vamos procurar a região de estabilidade das soluções para as flutuações dos operadores do sistema. Para fazermos isto, vejamos que, em ausência das forças de Langevin, a solução da Eq.(5.49) se escreve da seguinte forma:

$$\delta\widehat{\mathbf{Z}}(t) = \delta\widehat{\mathbf{Z}}(0)e^{\mathbf{A}st} . \quad (5.74)$$

Para que as flutuações não cresçam e violem a condição de validade das soluções, a matriz  $\mathbf{A}_S$  não pode ter autovalores cuja parte real seja positiva. Esta condição não é satisfeita nos resultados apresentados nas Refs.[2, 3].

Os autovalores da matriz  $\mathbf{A}_S$  dependem fortemente do número de átomos considerado e das amplitudes dos campos intracavidade. Sendo assim, testamos várias combinações destes parâmetros de modo a obter uma ampla região onde a estabilidade das soluções fosse satisfeita. Para ilustrar isso, na Fig.5.2 apresentamos duas curvas com a parte real dos autovalores da matriz  $\mathbf{A}_S$ . Nessas curvas estão contidas a parte real dos doze autovalores da matriz em questão. Na curva da esquerda a intensidade do campo de bombeio intracavidade é  $I_1 = 3,89 \times 10^{-1} \text{ mW/cm}^2$  ( $\beta_1 = 89$ ) e na curva da direita,  $I_1 = 9,73 \text{ mW/cm}^2$  ( $\beta_1 = 447$ ). A intensidade do feixe sonda, para ambas curvas, é  $I_2 = 2,80 \text{ mW/cm}^2$  ( $\alpha_2 = 240$ ). Estas intensidades foram escolhidas com base na intensidade de saturação da transição atômica de valor  $I_{SAT} = 1,6 \text{ mW/cm}^2$ . O número total de átomos considerado foi  $\mathcal{N} = 1 \times 10^4$ .

Como podemos ver, em toda a região de varredura da frequência do campo sonda, as soluções são válidas, ou seja, a parte real de todos os autovalores da matriz  $\mathbf{A}_S$  apresenta só valores negativos. As discontinuidades que aparecem nas curvas da esquerda devem-se a artefatos do programa com o qual os autovalores são calculados (Matlab R13).

Tendo encontrado uma ampla região para a varredura do campo sonda onde as soluções são válidas, realizamos os cálculos dos valores médios das polarizações macroscópicas. As previsões teóricas são apresentadas a seguir.

Para começar, na Fig.5.3 mostramos as curvas da parte imaginária da susceptibilidade atômica associada à transição acoplada pelo campo sonda, definida como:

$$\chi_2 = \frac{s_2}{\beta_2} , \quad (5.75)$$

para duas amplitudes diferentes do campo de bombeio intracavidade:  $\beta_1 = 60$  curva (a) e  $\beta_1 = 240$  curva (b) e uma mesma amplitude do campo sonda intracavidade  $\beta_2 = 240$  para ambas curvas, em função da dessintonia do sonda  $\Delta_{L2}$ .

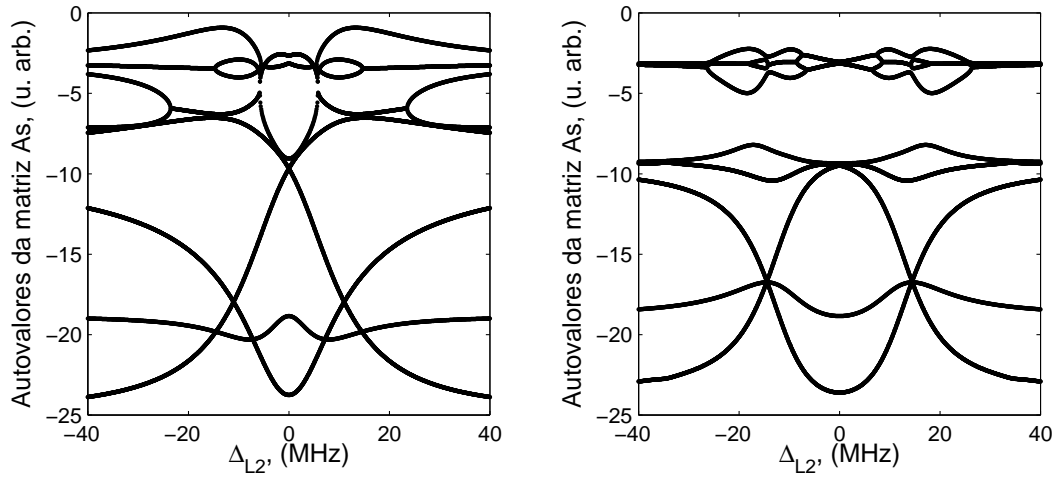


Figura 5.2: Curvas com a parte real dos autovalores da matriz  $\mathbf{A}_S$  no cálculo das flutuações dos operadores do sistema acoplado átomos-campos intracavidade.  $\mathcal{N} = 1 \times 10^4$ ;  $\beta_1 = 89$  (esquerda) e  $\beta_1 = 447$  (direita);  $\beta_2 = 240$  para ambas curvas.

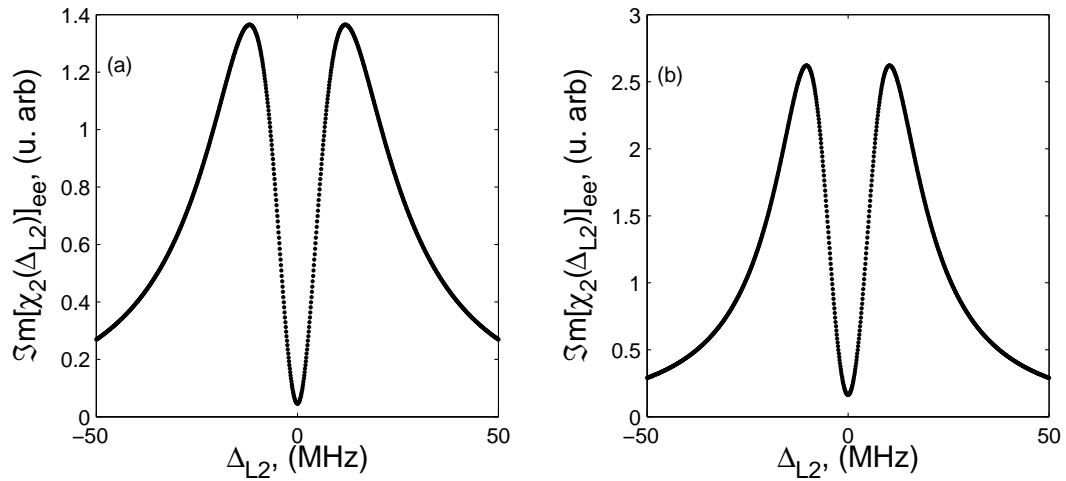


Figura 5.3: Curvas com a parte imaginária da susceptibilidade  $\chi_2$ , Eq.(5.75).  $\mathcal{N} = 1 \times 10^4$ ; (a)  $\beta_1 = 60$  e (b)  $\beta_1 = 240$ ;  $\beta_2 = 240$  para ambas curvas.

Como podemos ver da Fig.5.3, a parte imaginária da susceptibilidade atômica (absorção do feixe pelos átomos) associada ao feixe sonda, apresenta uma região de transparência induzida que é máxima na perfeita sintonia do sonda  $\Delta_{L2} = 0$ . Na curva (a) a amplitude do campo de bombeio intracavidade é 4 vezes menor do que a amplitude do campo sonda intracavidade, sendo que na curva (b) as amplitudes dos campos intracavidade são iguais.

Na obtenção das curvas da Fig.5.3, novamente, as amplitudes intracavidade

dos campos foram escolhidas de maneira tal que as suas intensidades fossem comparáveis entre si e da ordem da intensidade de saturação da transição atômica. Este é um caso de aprisionamento coerente de população. Caracterizado por um estado estacionário do sistema - superposição dos estados atômicos fundamentais criada por taxas de Rabi similares - que também permite observar a transparência induzida na parte imaginária da susceptibilidade atômica associada à transição acoplada pelo campo de bombeio (curvas similares às do campo sonda).

No regime de intensidades mencionado no parágrafo anterior, é possível estudar o ruído quântico dos campos e as correlações entre eles. Isto é feito através da linearização das flutuações dos operadores do sistema em torno de seus valores médios, no estado estacionário. Esses resultados serão apresentados na próxima seção.

### 5.5.3 Ruído de quadratura dos campos e correlações

Para continuar com as previsões teóricas deste modelo vamos ver previsões para o ruído das quadraturas amplitude e fase dos campos de bombeio e sonda detetados separadamente, bem como o das correlações dessas quadraturas entre ambos campos.

Em primeiro lugar, na Fig.5.4 apresentamos o ruído da quadratura amplitude do campo de bombeio [curva (a)] e do campo sonda [curva (b)] detetados, em função da dessintonia do sonda  $\Delta_{L2}$  para perfeita sintonia do campo de bombeio  $\Delta_{L1} = 0$ , considerando as amplitudes dos respectivos campos intracavidade iguais,  $\beta_1 = \beta_2 = 240$ .

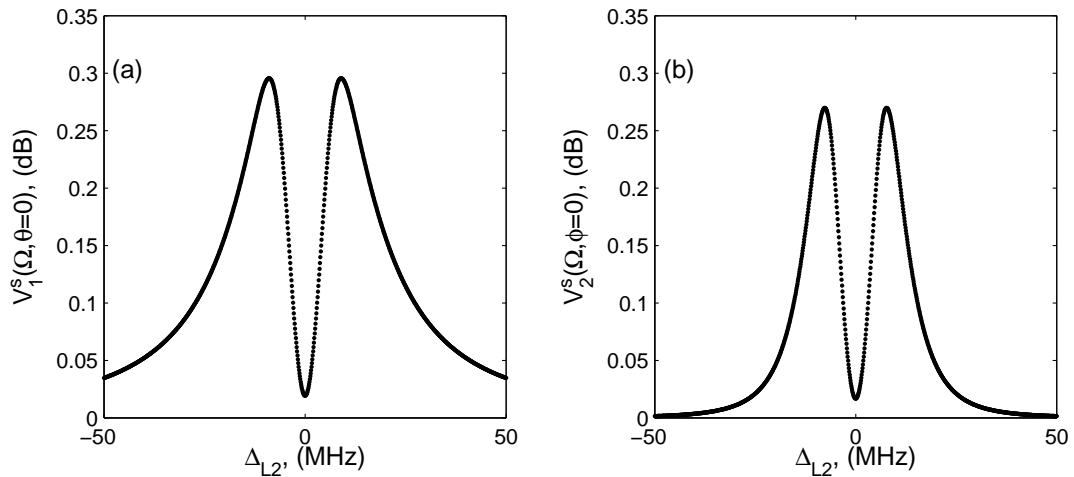


Figura 5.4: Curvas com o ruído da quadratura amplitude dos campos detetados. (a); campo de bombeio  $V_1^s(\Omega, \theta = 0)$  e (b); campo sonda  $V_2^s(\Omega, \phi = 0)$ . Freqüência de análise  $\Omega = 2\pi \times (2 \text{ MHz})$ .

Como vemos na Fig.5.4, ambos os campos, após interagir com os átomos e ser detetados, apresentam um excesso de ruído, simétrico, nas vizinhanças da perfeita sintonia Raman  $\Delta_R = 0$  ( $\Delta_{L1} = \Delta_{L2}$ ). Por outro lado, para perfeita sintonia Raman (condição de ressonância da transparência induzida) o ruído dessa quadratura, para ambos campos, corresponde praticamente ao ruído das mesmas num estado coerente (0 dB). O pequeno excesso de ruído que aparece na perfeita ressonância da EIT está diretamente relacionado com a coerência induzida pelos campos entre os estados fundamentais, o que se manifesta nos cálculos através da taxa de perda da coerência  $\Gamma_{12}$  que, para estas curvas, foi de  $2\pi \times (100 \text{ kHz})$ . Quando essa taxa se faz igual a zero ( $\Gamma_{12} = 0$ ) ou seja, quando a coerência entre os estados fundamentais é perfeita, o ruído dessas quadraturas para essa condição de EIT corresponde ao ruído das mesmas num estado coerente.

As previsões teóricas deste modelo para o ruído da quadratura fase do campo de bombeio e do campo sonda detetados, usando os mesmos parâmetros das curvas da Fig.5.4, em função da dessintonia do sonda, são mostradas na Fig.5.5, curva (a) e curva (b), respectivamente.

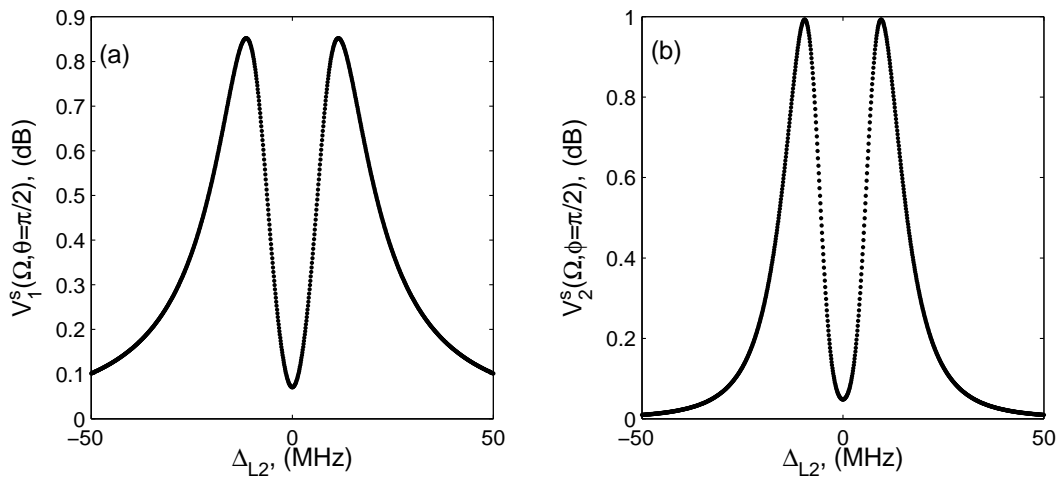


Figura 5.5: Curvas com o ruído da quadratura fase dos campos detetados. (a); campo de bombeio  $V_1^s(\Omega, \theta = \pi/2)$  e (b); campo sonda  $V_2^s(\Omega, \phi = \pi/2)$ . Frequência de análise  $\Omega = 2\pi \times (2 \text{ MHz})$ .

Como vemos na Fig.5.5 o ruído da quadratura de fase de ambos os campos, apresenta um comportamento muito similar ao correspondente ruído da quadratura amplitude, sendo que para este caso o excesso de ruído nas vizinhanças da perfeita sintonia Raman  $\Delta_R = 0$  é maior do que para o caso do ruído da amplitude. Novamente, na condição de ressonância da transparência induzida, o ruído dessa quadratura, para ambos campos, corresponde praticamente ao ruído da mesma num estado coerente (0 dB).

Os resultados apresentados nas Figs.5.4 e 5.5 são diferentes dos resultados apresentados na Ref.[2], em que se prevê, para a perfeita ressonância da transparência induzida, a existência de um excesso de ruído na quadratura amplitude e uma compressão de ruído na quadratura fase de ambos os campos detectados e o ruído correspondente ao de um estado coerente em toda a região vizinha a mesma.

Um aumento das amplitudes dos campos intracavidade, o que se traduz num aumento quadrático da intensidade dos campos que interagem com os átomos, não muda a forma das curvas do ruído das quadraturas dos campos detectados, sendo que para este caso as diferenças com relação às curvas apresentadas anteriormente estão no alargamento do sinal de EIT (conhecido fenômeno de alargamento por potência) e a diminuição da amplitude dos excessos de ruído em torno da ressonância da EIT.

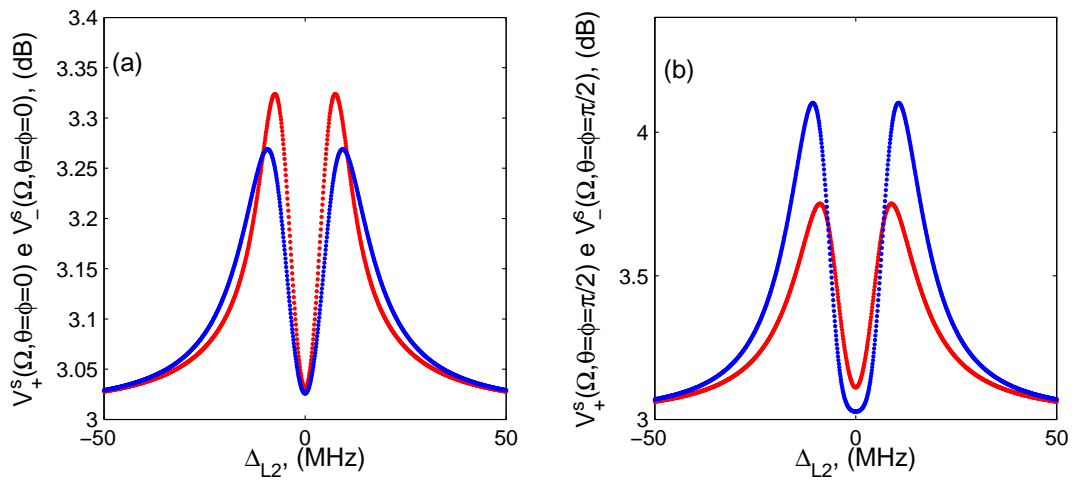


Figura 5.6: Curvas com o ruído da soma e da diferença da intensidades dos campos detectados. (a); quadratura amplitude: curva vermelha  $V_+^s(\Omega, \theta = \phi = 0)$  e curva azul  $V_-^s(\Omega, \theta = \phi = 0)$ ; (b); quadratura fase: curva vermelha  $V_+^s(\Omega, \theta = \phi = \pi/2)$  e curva azul  $V_-^s(\Omega, \theta = \phi = \pi/2)$ . Freqüência de análise  $\Omega = 2\pi \times (2 \text{ MHz})$ .

Tal como foi apresentado no Cap.4, na experiência real temos acesso ao ruído da soma e da diferença das intensidades. Isto é muito importante para determinarmos a correlação entre os campos. Para vermos isto, na Fig.5.6 apresentamos as curvas correspondentes ao ruído da soma  $V_+^s(\Omega, \theta = \phi = 0)$  e da diferença  $V_-^s(\Omega, \theta = \phi = 0)$  para a quadratura amplitude [curva (a)] e para a quadratura fase  $V_+^s(\Omega, \theta = \phi = \pi/2)$  e  $V_-^s(\Omega, \theta = \phi = \pi/2)$  [curva (b)], entre os campos de bombeio e sonda, após interação com os átomos, para os mesmos parâmetros usados nas Figs.5.4 e 5.5. Para ambas figuras, as curvas de cor vermelha correspondem ao ruído da soma e as de cor azul ao ruído da diferença.

Das curvas apresentadas na Fig.5.6, podemos inferir que, para o caso da quadratura amplitude [curva (a)] e na perfeita ressonância de EIT, os campos ficam praticamente não-correlacionados. À medida que aumenta a dessintonia do sonda, os campos evidenciam uma pequena correlação. Para dessintonias do sonda maiores que 2 vezes a largura de linha do sinal de transparência, os campos ficam anti-correlacionados tendendo, novamente, a ficar não correlacionados para dessintonias muito maiores que a largura do sinal de transparência. Um comportamento similar pode ser inferido para a quadratura fase [curva (b)], sendo que para este caso a amplitude da anticorrelação é muito maior do que a mesma para o caso da quadratura amplitude.

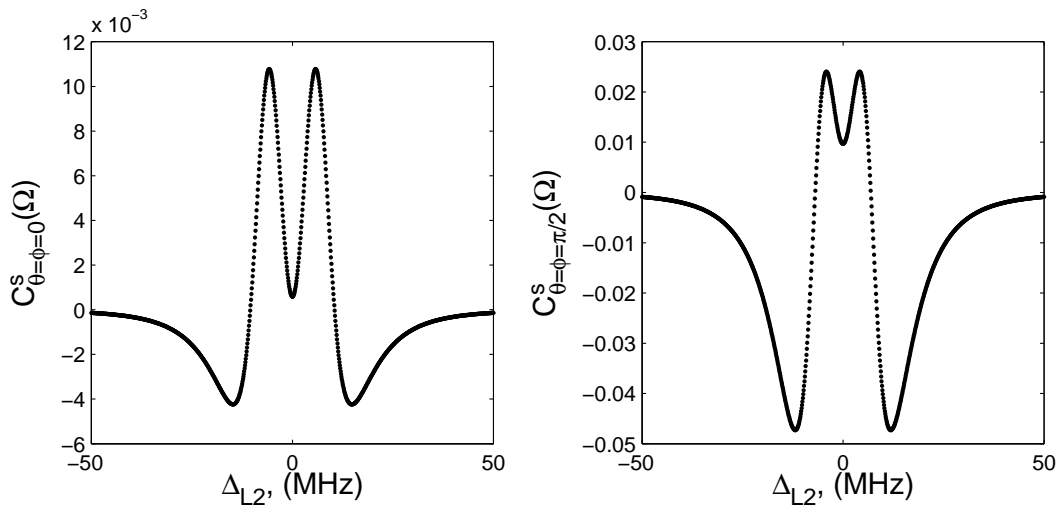


Figura 5.7: (esquerda) Coeficiente de correlação de amplitude  $\mathcal{C}_{\theta=\phi=0}^s(\Omega)$ ; (direita) Coeficiente de correlação de fase  $\mathcal{C}_{\theta=\phi=\pi/2}^s(\Omega)$ . Freqüência de análise  $\Omega = 2\pi \times (2 \text{ MHz})$ .

Isso também pode ser verificado através dos coeficientes de correlação das correspondentes quadraturas. Para tal, na Fig.5.7 apresentamos as curvas do coeficiente de correlação entre os ruídos das quadraturas amplitude (esquerda) e das quadraturas fase (direita) dos campos de bombeio e sonda detetados, em função da dessintonia do sonda  $\Delta_{L2}$ .

Os parâmetros usados para a obtenção das curvas da Fig.5.7 são os mesmos que os usados nas curvas das Figs.5.4 a 5.6.

Tal como no caso dos espectros de ruído dos campos detetados, um aumento da amplitude dos campos intracavidade não muda a forma das curvas anteriores.

## 5.6 Comentários finais

Neste capítulo apresentamos algumas das previsões teóricas para os valores médios das variáveis atômicas no estado estacionário. Também apresentamos previsões para o ruído de quadratura amplitude e fase dos campos detetados e das correlações entre eles, usando a linearização das flutuações em torno desses valores médios. Estes resultados foram obtido com o modelo quântico baseado nas equações de Heisenberg-Langevin onde, a interação dos campos e os átomos, foi simulada no interior de uma cavidade em anel e de grande finesse.

Feitas as correções das falhas detetadas na implementação deste modelo, as previsões obtidas são diferentes das previsões apresentadas nas Refs.[2, 3] e da maioria dos resultados experimentais que foram apresentados no Cap.4.

Contudo, devemos lembrar que este modelo apresenta diferenças com a experiência. Entre outras: os resultados experimentais foram obtidos usando campos com excesso de ruído nas suas fases ( $\approx 50$  dB medido), sendo que o modelo considera os campos incidentes na cavidade ambos em estado coerente; experimentalmente, os campos analisados são aqueles que interagem com os átomos e saem da célula de vapor de *Rb*, no entanto neste modelo, os campos analisados são uma superposição de campos que não interagem com os átomos (refletido no espelho de acoplamento) e aqueles que saem da cavidade, transmitidos pelo mesmo espelho.

Por outro lado, este modelo pode ser estendido aos casos em que os campos incidentes nas cavidades se encontram em estados comprimidos, estados de Fock ou, em combinações deles. Por exemplo; o campo de bombeio incidente pode estar em estado coerente e o campo sonda num estado de Fock. Outra extensão deste modelo, que se ajusta mais ao estudo experimental apresentado no Cap.4, está sendo realizada pelo aluno de doutorado Pablo Barberis Blostein junto ao Prof. Nicim Zagury da UFRJ, com os quais mantemos uma estreita colaboração: neste caso a idéia é resolver as equações de Maxwell para os operadores dos campos livres quantizados, usando a aproximação de amplitude lentamente variável.

Para finalizar, a falta de acordo entre os resultados experimentais e as previsões do modelo apresentado neste capítulo, nos levou a desenvolver um modelo que se aproxima-se mais da experiência: interação dos campos e os átomos sem cavidade e excesso de ruído de fase dos campos. Este novo modelo, semi-clássico, é o tema do seguinte capítulo.





# Capítulo 6

## Modelo Estocástico para EIT

### 6.1 Introdução

Em janeiro de 2003 o nosso grupo contou com a visita do Prof. Arturo Lezama, do Instituto de Física da Universidade de Montevideo, Uruguay, com o qual mantemos uma estreita colaboração. O grupo do Prof. Lezama tem se dedicado ao estudo do fenômeno de Absorção Induzida Eletromagneticamente, EIA, (do inglês, *Electromagnetically Induced Absorption*). Este efeito, relacionado com o de EIT, pode ser observado em átomos de dois níveis degenerados. O meio atômico utilizado experimentalmente pelo grupo do Prof. Lezama é, também, o rubídio [71, 72, 73].

Aproveitando a visita do Prof. Lezama e a sua experiência em EIA, por um lado, e à falta de acordo qualitativo entre o modelo quântico e os resultados experimentais, por outro lado, e após longas discussões teóricas sobre as possíveis causas do comportamento estatístico de nossos feixes na EIT, concordamos em que um dos principais responsáveis pelo ruído de intensidade observado experimentalmente nos feixes de bombeio e sonda, na transparência induzida eletromagneticamente, era o excesso de ruído de fase dos nossos feixes laser, o qual é transferido à intensidade dos campos, ressonantemente, pelos átomos.

Do dito acima, concluímos que um modelo mais próximo da experiência deveria considerar esse excesso de ruído de fase dos campos. Além disso, o modelo deveria tratar a interação dos campos e os átomos sem a ajuda de uma cavidade dado que, experimentalmente, os campos detetados são aqueles que saem da região de interação com os átomos. Isto nos levou a desenvolver o segundo modelo teórico para o estudo do ruído dos campos na EIT. O desenvolvimento deste modelo - semi-clássico com campos com fases estocásticas - e as suas previsões teóricas é o tema do presente capítulo.

Em contraste com o modelo quântico, neste modelo, os feixes de bombeio e sonda, são considerados clássicos, com flutuações Markovianas nas suas fases, amplitudes constantes e com propagação livre. A interação dos átomos

com os campos é considerada semi-classicamente usando equações óticas de Bloch estocásticas. Além disso, intensidades comparáveis às usadas experimentalmente, polarizações, dessintonias e larguras de linha serão consideradas no tratamento dos campos incidentes sobre a amostra atômica.

## 6.2 O sistema

As principais características do acoplamento de dois campos clássicos com fases estocásticas interagindo com uma amostra de átomos e o desenvolvimento das expressões gerais que permitem obter o espectro de ruído de intensidade e da quadratura fase dos campos e das correlações entre eles foram apresentados na Sec.2.3.

Tal como no modelo apresentado no Cap.5, o sistema atômico consiste de um conjunto de átomos de três níveis na configuração  $\Lambda$  (ver Fig.5.1). Inicialmente desprezamos o efeito Doppler, que será incorporado depois. No entanto, com o objetivo de simular os efeitos de uma interação de tempo finito entre os átomos e os campos, consideramos que os átomos escapam da região de interação com os feixes com uma taxa  $\Gamma_{12}$ , ( $\Gamma_{12} \ll \Gamma$ ). Este escape é compensado, no estado estacionário, pela chegada de átomos novos aos estados fundamentais.

Neste caso o Hamiltoniano do sistema acoplado átomos-campos copropagantes, se escreve:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) = & -\hbar\omega_1\rho_{11} - \hbar\omega_2\rho_{22} + \\ & + \hbar\Omega_1 (\rho_{10}e^{i(\omega_{L1}t+\varphi_1)} + \rho_{01}e^{-i(\omega_{L1}t+\varphi_1)}) + \\ & + \hbar\Omega_2 (\rho_{20}e^{i(\omega_{L2}t+\varphi_2)} + \rho_{02}e^{-i(\omega_{L2}t+\varphi_2)}) , \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são as frequências de Rabi, definidas a partir da seguinte expressão geral:

$$\Omega_k = -\frac{\mu_k \mathcal{E}_{Lk}}{\hbar} \quad ; \quad k = 1, 2 , \quad (6.2)$$

com  $\mu_k$  e  $\mathcal{E}_{Lk}$  (reais) o momento de dipolo atômico e a amplitude do campo, correspondente.

A evolução temporal dos elementos da matriz densidade  $\rho_{ij}$ , é dada pela equação de Schrödinger:

$$\frac{d}{dt}\rho_{ij}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}(t), \rho_{ij}(t)] , \quad (6.3)$$

Considerando o Hamiltoniano dado pela Eq.(6.1) e a Eq.(6.3) encontramos as seguintes equações de evolução para os operadores de um átomo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{D}_1(t) = & \Gamma_1^{(a)} \mathcal{D}_1 + \Gamma_1^{(a)} \mathcal{D}_2 + \Gamma_1^{(a)} + 2i\Omega_1 \rho_{10} e^{i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} - \\ & - 2i\Omega_1 \rho_{01} e^{-i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} + i\Omega_2 \rho_{20} e^{i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} - \\ & - i\Omega_2 \rho_{02} e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} , \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{D}_2(t) = & \Gamma_2^{(a)} \mathcal{D}_1 + \Gamma_2^{(a)} \mathcal{D}_2 + \Gamma_2^{(a)} + i\Omega_1 \rho_{10} e^{i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} - \\ & - i\Omega_1 \rho_{01} e^{-i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} + 2i\Omega_2 \rho_{20} e^{i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} - \\ & - 2i\Omega_2 \rho_{02} e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} , \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{10}(t) = & - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + i\omega_1 \right) \rho_{10} + i\Omega_1 \mathcal{D}_1 e^{-i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} - \\ & - i\Omega_2 \rho_{12} e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} , \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{01}(t) = & - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - i\omega_1 \right) \rho_{01} - i\Omega_1 \mathcal{D}_1 e^{i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} + \\ & + i\Omega_2 \rho_{21} e^{i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} , \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{20}(t) = & - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + i\omega_2 \right) \rho_{20} + i\Omega_2 \mathcal{D}_2 e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} - \\ & - i\Omega_1 \rho_{21} e^{-i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} , \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{02}(t) = & - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - i\omega_2 \right) \rho_{02} - i\Omega_2 \mathcal{D}_2 e^{i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} + \\ & + i\Omega_1 \rho_{12} e^{i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} , \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{21}(t) = & -(\Gamma_{12} - i(\omega_1 - \omega_2)) \rho_{21} - i\Omega_1 \rho_{20} e^{i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} + \\ & + i\Omega_2 \rho_{01} e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} , \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{12}(t) = & -(\Gamma_{12} + i(\omega_1 - \omega_2)) \rho_{12} + i\Omega_1 \rho_{02} e^{-i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} - \\ & - i\Omega_2 \rho_{10} e^{i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} , \end{aligned} \quad (6.11)$$

onde usamos a condição de normalização e definimos os operadores de diferença de população:

$$\rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{22} = 1; \quad \mathcal{D}_1 = \rho_{00} - \rho_{11} \quad \mathcal{D}_2 = \rho_{00} - \rho_{22} , \quad (6.12)$$

respectivamente.

Em contraste com o modelo quântico, neste caso os parâmetros dissipativos do sistema são dados pelas seguintes expressões:

$$\Gamma_1^{(a)} = -\frac{1}{3}(2\Gamma_1 + \Gamma_2) , \quad (6.13)$$

$$\Gamma_2^{(2)} = -\frac{1}{3}(\Gamma_1 + 2\Gamma_2) . \quad (6.14)$$

Definindo as seguintes envolventes atômicas lentamente variáveis:

$$\rho_{10}(t) = e^{-i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} \mathcal{P}_1(t) , \quad (6.15)$$

$$\rho_{20}(t) = e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} \mathcal{P}_2(t) , \quad (6.16)$$

$$\rho_{21}(t) = e^{i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} \mathcal{P}_3(t) , \quad (6.17)$$

com  $k = 1, 2, 3$ , as Eqs.(6.4 a 6.11) se transformam nas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{D}_1(t) = & \Gamma_1^{(a)} \mathcal{D}_1 + \Gamma_1^{(a)} \mathcal{D}_2 + \Gamma_1^{(a)} + 2i\Omega_1 \mathcal{P}_1(t) - 2i\Omega_1 \mathcal{P}_1^+(t) + \\ & + i\Omega_2 \mathcal{P}_2(t) - i\Omega_2 \mathcal{P}_2^+(t) , \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{D}_2(t) = & \Gamma_2^{(a)} \mathcal{D}_1 + \Gamma_2^{(a)} \mathcal{D}_2 + \Gamma_2^{(a)} + i\Omega_1 \mathcal{P}_1(t) - i\Omega_1 \mathcal{P}_1^+(t) + \\ & + 2i\Omega_2 \mathcal{P}_2(t) - 2i\Omega_2 \mathcal{P}_2^+(t) , \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{10}(t) = & e^{-i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} \left\{ - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + i\omega_1 \right) \mathcal{P}_1(t) + i\Omega_1 \mathcal{D}_1 - \right. \\ & \left. - i\Omega_2 \mathcal{P}_3^+(t) \right\} , \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{01}(t) = & e^{i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} \left\{ - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - i\omega_1 \right) \mathcal{P}_1^+(t) - i\Omega_1 \mathcal{D}_1 + \right. \\ & \left. + i\Omega_2 \mathcal{P}_3(t) \right\} , \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{20}(t) = & e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} \left\{ - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} + i\omega_2 \right) \mathcal{P}_2(t) + i\Omega_2 \mathcal{D}_2 - \right. \\ & \left. - i\Omega_1 \mathcal{P}_3(t) \right\} , \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{02}(t) = & e^{i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} \left\{ - \left( \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - i\omega_2 \right) \mathcal{P}_2^+(t) - i\Omega_2 \mathcal{D}_2 + \right. \\ & \left. + i\Omega_1 \mathcal{P}_3^+(t) \right\} , \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{21}(t) = & e^{i(\omega_{L1}t + \varphi_1)} e^{-i(\omega_{L2}t + \varphi_2)} \left\{ - (\Gamma_{12} - i(\omega_1 - \omega_2)) \mathcal{P}_3(t) - \right. \\ & \left. - i\Omega_1 \mathcal{P}_2(t) + i\Omega_2 \mathcal{P}_1^+(t) \right\} , \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12}(t) = e^{-i(\omega_{L1}t+\varphi_1)}e^{i(\omega_{L2}t+\varphi_2)} \left\{ -(\Gamma_{12} + i(\omega_1 - \omega_2))\mathcal{P}_3^+(t) + \right. \\ \left. + i\Omega_1\mathcal{P}_2^+(t) - i\Omega_2\mathcal{P}_1(t) \right\}. \quad (6.25)$$

### 6.3 Valores médios no estado estacionário

Para obtermos os valores médios das envolventes atômicas lentamente variáveis no estado estacionário, vamos definir os seguintes vetores:

$$\mathbf{y}(t) = \left( \mathcal{D}_1(t) \quad \mathcal{D}_2(t) \quad \hat{\rho}_{10}(t) \quad \hat{\rho}_{01}(t) \quad \hat{\rho}_{20}(t) \quad \hat{\rho}_{02}(t) \quad \hat{\rho}_{21}(t) \quad \hat{\rho}_{12}(t) \right)^T, \quad (6.26)$$

$$\mathbf{x}(t) = \left( \mathcal{D}_1(t) \quad \mathcal{D}_2(t) \quad \mathcal{P}_1(t) \quad \mathcal{P}_1^*(t) \quad \mathcal{P}_2(t) \quad \mathcal{P}_2^*(t) \quad \mathcal{P}_3(t) \quad \mathcal{P}_3^*(t) \right)^T, \quad (6.27)$$

os quais, a partir das Eqs.(6.18 a 6.25), satisfazem a seguinte relação:

$$\mathbf{y}(t) = e^{-i\mathcal{N}_1(\omega_{L1}t+\varphi_1)}e^{-i\mathcal{N}_2(\omega_{L2}t+\varphi_2)}\mathbf{x}(t), \quad (6.28)$$

e, conseqüentemente:

$$\mathbf{x}(t) = e^{i\mathcal{N}_1(\omega_{L1}t+\varphi_1)}e^{i\mathcal{N}_2(\omega_{L2}t+\varphi_2)}\mathbf{y}(t), \quad (6.29)$$

onde  $\mathcal{N}_1$  e  $\mathcal{N}_2$  são matrizes quadradas cujos elementos são  $-1$ ,  $0$  ou  $1$ .

#### 6.3.1 Cálculo de Itô

Dado que o vetor  $\mathbf{x}(t)$  é uma função de variáveis estocásticas, para obtermos a evolução temporal do mesmo, devemos realizar o cálculo de Itô. Para isto, vamos re-escrever a Eq.(6.29) da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(t) = e^{i(\mathcal{N}_1\omega_{L1}+\mathcal{N}_2\omega_{L2})t}e^{i(\mathcal{N}_1\varphi_1+\mathcal{N}_2\varphi_2)}\mathbf{y}(t). \quad (6.30)$$

A derivada da Eq.(6.30) é dada pela seguinte expressão:

$$d\mathbf{x}(t) = d\{e^{i(\mathcal{N}_1\omega_{L1}+\mathcal{N}_2\omega_{L2})t}\}e^{i(\mathcal{N}_1\varphi_1+\mathcal{N}_2\varphi_2)}\mathbf{y}(t) + \\ + e^{i(\mathcal{N}_1\omega_{L1}+\mathcal{N}_2\omega_{L2})t}d\{e^{i(\mathcal{N}_1\varphi_1+\mathcal{N}_2\varphi_2)}\}\mathbf{y}(t) + \\ + e^{i(\mathcal{N}_1\omega_{L1}+\mathcal{N}_2\omega_{L2})t}e^{i(\mathcal{N}_1\varphi_1+\mathcal{N}_2\varphi_2)}d\{\mathbf{y}(t)\}. \quad (6.31)$$

Das expressões anteriores, derivamos as seguintes relações:

$$d\{e^{i(\mathcal{N}_1\omega_{L1}+\mathcal{N}_2\omega_{L2})t}\} = i(\mathcal{N}_1\omega_{L1} + \mathcal{N}_2\omega_{L2})e^{i(\mathcal{N}_1\omega_{L1}+\mathcal{N}_2\omega_{L2})t} . \quad (6.32)$$

Dado que a derivada central da Eq.(6.31) contém as variáveis estocásticas, devemos realizar o cálculo até segunda ordem, ou seja:

$$\begin{aligned} d\{e^{i(\mathcal{N}_1\varphi_1+\mathcal{N}_2\varphi_2)}\} &= e^{i[\mathcal{N}_1(\varphi_1+d\varphi_1)+\mathcal{N}_2(\varphi_2+d\varphi_2)]} - e^{i(\mathcal{N}_1\varphi_1+\mathcal{N}_2\varphi_2)} \\ &= e^{i(\mathcal{N}_1\varphi_1+\mathcal{N}_2\varphi_2)} \{e^{i(\mathcal{N}_1d\varphi_1+\mathcal{N}_2d\varphi_2)} - 1\} . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Desenvolvendo a exponencial do parêntesis na Eq.(6.33) em série de Maclaurin até segunda ordem, temos:

$$\begin{aligned} e^{i(\mathcal{N}_1d\varphi_1+\mathcal{N}_2d\varphi_2)} &= 1 + i(\mathcal{N}_1d\varphi_1 + \mathcal{N}_2d\varphi_2) + \frac{1}{2!}[i^2(\mathcal{N}_1d\varphi_1 + \mathcal{N}_2d\varphi_2)^2] \\ &= 1 + i(\mathcal{N}_1d\varphi_1 + \mathcal{N}_2d\varphi_2) - \frac{1}{2}\left[\mathcal{N}_1^2d\varphi_1^2 + \mathcal{N}_2^2d\varphi_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{N}_1\mathcal{N}_2d\varphi_1d\varphi_2 + \mathcal{N}_2\mathcal{N}_1d\varphi_2d\varphi_1\right] . \end{aligned} \quad (6.34)$$

Substituindo o resultado da Eq.(6.34) na expressão dada pela Eq.(6.33), chegamos a:

$$\begin{aligned} d\{e^{i(\mathcal{N}_1\varphi_1+\mathcal{N}_2\varphi_2)}\} &= e^{i(\mathcal{N}_1\varphi_1+\mathcal{N}_2\varphi_2)} \left\{ i(\mathcal{N}_1d\varphi_1 + \mathcal{N}_2d\varphi_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\left[\mathcal{N}_1^2d\varphi_1^2 + \mathcal{N}_2^2d\varphi_2^2 + 2\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2d\varphi_1d\varphi_2\right] \right\} , \end{aligned} \quad (6.35)$$

onde usamos a relação entre as matrizes  $\mathcal{N}_1$  e  $\mathcal{N}_2$  e consideramos  $d\varphi_1d\varphi_2 = d\varphi_2d\varphi_1$ .

Substituindo os resultados das Eqs.(6.32) e (6.35) na Eq.(6.31), chegamos a:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(t) &= \left\{ \left[ i(\mathcal{N}_1\omega_{L1} + \mathcal{N}_2\omega_{L2}) + i(\mathcal{N}_1d\varphi_1 + \mathcal{N}_2d\varphi_2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}\left(\mathcal{N}_1^2d\varphi_1^2(t) + \mathcal{N}_2^2d\varphi_2^2 + 2\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2d\varphi_1d\varphi_2\right) \right] \mathbf{x}(t) + \right. \\ &\quad \left. + e^{i(\mathcal{N}_1\omega_{L1}+\mathcal{N}_2\omega_{L2})t} e^{i(\mathcal{N}_1\varphi_1+\mathcal{N}_2\varphi_2)} \{d\mathbf{y}(t)\} \right\} . \end{aligned} \quad (6.36)$$

Das Eq.(6.18–6.25), podemos escrever o seguinte:

$$d\mathbf{y}(t) = e^{-i(\mathcal{N}_1\omega_{L1}+\mathcal{N}_2\omega_{L2})t} e^{-i(\mathcal{N}_1\varphi_1+\mathcal{N}_2\varphi_2)} \{\mathcal{B}_{at}.\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}_0\}dt , \quad (6.37)$$

onde  $e^{-i(\mathcal{N}_1\omega_{L1} + \mathcal{N}_2\omega_{L2})t} e^{-i(\mathcal{N}_1\varphi_1 + \mathcal{N}_2\varphi_2)} \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0$ , sendo  $\mathbf{y}_0$  um vetor dado explicitamente por:

$$\mathbf{y}_0 = (\Gamma_1^{(a)} \quad \Gamma_2^{(a)} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T, \quad (6.38)$$

e  $\mathcal{B}_{at}$  uma matriz que depende das frequências de Rabi, das taxas de emissão espontânea, da taxa de perda de coerência entre os estados fundamentais e das frequências das transições atômicas correspondentes.

Substituindo a Eq.(6.37) na Eq.(6.36), tomando a média de ambos lados da igualdade, levando em conta as propriedades dos incrementos de Wiener e o fato de  $\mathbf{x}(t)$  ser uma função não antecipante, i.e.,  $[\langle \mathbf{x}(t) d\varphi_k \rangle = 0]$ , com  $k = 1, 2$ , chegamos a:

$$d\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \left[ i(\mathcal{N}_1\omega_{L1} + \mathcal{N}_2\omega_{L2}) - b_1\mathcal{N}_1^2 - b_2\mathcal{N}_2^2 - 2b_{12}\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 + \mathcal{B}_{at} \right] \langle \mathbf{x}(t) \rangle dt + \mathbf{y}_0 dt. \quad (6.39)$$

Definimos a matriz  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = i(\mathcal{N}_1\omega_{L1} + \mathcal{N}_2\omega_{L2}) - b_1\mathcal{N}_1^2 - b_2\mathcal{N}_2^2 - 2b_{12}\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2 + \mathcal{B}_{at}, \quad (6.40)$$

e o estado estacionário do sistema é dado pela condição:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = 0. \quad (6.41)$$

A solução da Eq.(6.39), para o estado estacionário, obtém-se multiplicando a inversa da matriz  $\mathcal{A}$  pelo vetor  $\mathbf{y}_0$  com sinal trocado, ou seja:

$$\langle \mathbf{x} \rangle_{ee} = \mathcal{A}^{-1} \cdot [-\mathbf{y}_0]. \quad (6.42)$$

A matriz  $\mathcal{A}$  pode ser derivada explicitamente a partir das Eqs.(6.18 a 6.25) e os seus elementos dependem, dentre outros parâmetros, das dessintonias dos campos de bombeio  $\Delta_{L1} = \omega_{L1} - \omega_1$  e do campo sonda  $\Delta_{L2} = \omega_{L2} - \omega_2$ , a dessintonia Raman  $\Delta_{L12} = \Delta_{L1} - \Delta_{L2}$ , as larguras espectrais das Lorentzianas dos campos de bombeio  $b_1$  e do campo sonda  $b_2$  e da relação entre elas  $b_{12}^{(a)} = b_1 + b_2 - 2b_{12}$ , com  $b_{12}$  definido a partir das seguintes relações:

$$\langle d\varphi_1(t) d\varphi_2(t) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se os campos são independentes.} \\ 2b_{12} dt, & \text{se os campos são dependentes.} \end{cases} \quad (6.43)$$

## 6.4 Espectro de ruído

### 6.4.1 Matriz de covariância

Para efetuar o cálculo do espectro de ruído dos campos que interagiram com os átomos, bem como o das correlações entre eles, é essencial o cálculo prévio da matriz de covariância das grandezas atômicas. O primeiro passo nessa direção é o cálculo da matriz de correlação de 2ª ordem, definida da seguinte forma:

$$G(t, t, \omega_0, \omega'_0) = \mathbf{x}(t, \omega_0) \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) . \quad (6.44)$$

Usando a definição do vetor  $\mathbf{x}(t, \omega_0)$  dada pela Eq.(6.29), a equação anterior pode ser escrita como:

$$G(t, t, \omega_0, \omega'_0) = e^{i(\mathcal{N}_1\omega_{L1} + \mathcal{N}_2\omega_{L2})t} e^{i(\mathcal{N}_1\varphi_1 + \mathcal{N}_2\varphi_2)} \mathbf{y}(t, \omega_0) \times \\ \times \mathbf{y}^\dagger(t, \omega'_0) e^{-i(\mathcal{N}_1\omega_{L1} + \mathcal{N}_2\omega_{L2})t} e^{-i(\mathcal{N}_1\varphi_1 + \mathcal{N}_2\varphi_2)} , \quad (6.45)$$

onde a dependência temporal das variáveis estocásticas  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$  foi omitida por comodidade.

Levando em conta, novamente, que  $\mathbf{x}(t, \omega_0)$  é um vetor cujas componentes são variáveis estocásticas, a derivada da Eq.(6.45) deve ser realizada até segunda ordem. Sendo assim, temos:

$$d[G(t, t, \omega_0, \omega'_0)] = d[\mathbf{x}(t, \omega_0) \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0)] \\ = [\mathbf{x}(t, \omega_0) + d\mathbf{x}(t, \omega_0)][\mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) + d\mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0)] - \\ - \mathbf{x}(t, \omega_0) \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \\ = d[\mathbf{x}(t, \omega_0)] \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) + \mathbf{x}(t, \omega_0) d[\mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0)] + \\ + d[\mathbf{x}(t, \omega_0)] d[\mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0)] . \quad (6.46)$$

Para simplificar o desenvolvimento da Eq.(6.46) vamos definir as seguintes funções:

$$\Theta_{12} = \mathcal{N}_1\omega_{L1} + \mathcal{N}_2\omega_{L2} \quad (6.47)$$

$$\Phi_{12}^{(a)} = \mathcal{N}_1\varphi_1 + \mathcal{N}_2\varphi_2 , \quad (6.48)$$

$$\Phi_{12}^{(b)} = \mathcal{N}_1d\varphi_1 + \mathcal{N}_2d\varphi_2 , \quad (6.49)$$

$$\Phi_{12}^{(c)} = [\mathcal{N}_1^2d\varphi_1^2 + \mathcal{N}_2^2d\varphi_2^2 + 2\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2d\varphi_1d\varphi_2] . \quad (6.50)$$

Fazendo uso das definições anteriores na Eq.(6.36), encontramos a seguinte expressão para  $d\mathbf{x}(t, \omega_0)$ :

$$d\mathbf{x}(t, \omega_0) = \left\{ i\Theta_{12} + i\Phi_{12}^{(b)} - \frac{1}{2}\Phi_{12}^{(c)} \right\} \mathbf{x}(t, \omega_0) dt + \\ + e^{i\Theta_{12}t} e^{i\Phi_{12}^{(a)}} \{ d\mathbf{y}(t, \omega_0) \} . \quad (6.51)$$



Visto que, com as definições anteriores, a Eq.(6.37) se transforma na seguinte expressão:

$$d\mathbf{y}(t, \omega_0) = e^{-i\Theta_1 t} e^{-i\Phi_{12}^{(a)}} \{ \mathcal{B}_{at} \cdot \mathbf{x}(t, \omega_0) + \mathbf{y}_0 \} dt, \quad (6.52)$$

a Eq.(6.51) se escreve, finalmente, da seguinte forma:

$$d\mathbf{x}(t, \omega_0) = \left\{ i\Theta_{12} + i\Phi_{12}^{(b)} - \frac{1}{2}\Phi_{12}^{(c)} + \mathcal{B}_{at} \right\} \mathbf{x}(t, \omega_0) dt + \mathbf{y}_0 dt, \quad (6.53)$$

e, conseqüentemente:

$$d\mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) = \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \left\{ -i\Theta_{12} - i\Phi_{12}^{(b)} - \frac{1}{2}\Phi_{12}^{(c)} + \mathcal{B}_{at}^\dagger \right\} dt + \mathbf{y}_0^\dagger dt. \quad (6.54)$$

Assim, a Eq.(6.46) adota a seguinte forma:

$$\begin{aligned} dG(t, t, \omega_0, \omega'_0) = & \left\{ i\Theta_{12} + i\Phi_{12}^{(b)} - \frac{1}{2}\Phi_{12}^{(c)} + \mathcal{B}_{at} \right\} \mathbf{x}(t, \omega_0) \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) + \\ & + \mathbf{x}(t, \omega_0) \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \left\{ -i\Theta_{12} - i\Phi_{12}^{(b)} - \frac{1}{2}\Phi_{12}^{(c)} + \mathcal{B}_{at}^\dagger \right\} + \\ & + \left\{ \left[ i\Theta_{12} + i\Phi_{12}^{(b)} - \frac{1}{2}\Phi_{12}^{(c)} + \mathcal{B}_{at} \right] \mathbf{x}(t, \omega_0) + \mathbf{y}_0 \right\} \times \\ & \times \left\{ \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \left[ -i\Theta_{12} - i\Phi_{12}^{(b)} - \frac{1}{2}\Phi_{12}^{(c)} + \mathcal{B}_{at}^\dagger \right] + \mathbf{y}_0^\dagger \right\} + \\ & + \mathbf{y}_0 \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) + \mathbf{x}(t, \omega_0) \mathbf{y}_0^\dagger. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Continuando com o desenvolvimento da derivada da função de correlação,  $dG(t, t, \omega_0, \omega'_0)$ , vemos que quando realizamos o produto:

$$\begin{aligned} & \left[ i\Theta_{12} + i\Phi_{12}^{(b)} - \frac{1}{2}\Phi_{12}^{(c)} + \mathcal{B}_{at} \right] \times \mathbf{x}(t, \omega_0) \times \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \times \\ & \times \left[ -i\Theta_{12} - i\Phi_{12}^{(b)} - \frac{1}{2}\Phi_{12}^{(c)} + \mathcal{B}_{at}^\dagger \right], \end{aligned} \quad (6.56)$$

os únicos termos que sobrevivem são obtidos a partir de:

$$\begin{aligned} (i\Phi_{12}^{(b)})G(t, t, \omega_0, \omega'_0)(-i\Phi_{12}^{(b)}) = & (\mathcal{N}_1 d\varphi_1 + \mathcal{N}_2 d\varphi_2) \times G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \times \\ & \times (\mathcal{N}_1 d\varphi_1 + \mathcal{N}_2 d\varphi_2), \end{aligned} \quad (6.57)$$

dado que os outros termos são quadráticos em  $dt$ .

Assim, quando fazemos a substituição dos resultados das operações que sobrevivem da Eq.(6.56) na Eq.(6.55), chegamos à seguinte expressão para a derivada da matriz de correlação, avaliada no valor médio:

$$\begin{aligned} d\langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle &= \mathcal{A}\langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle + \langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle \mathcal{A}^\dagger + \\ &+ 2b_1 \mathcal{N}_1 \langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle \mathcal{N}_1 + 2b_2 \mathcal{N}_2 \langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle \mathcal{N}_2 + \\ &+ 2b_{12} \mathcal{N}_1 \langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle \mathcal{N}_2 + 2b_{12} \mathcal{N}_2 \langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle \mathcal{N}_1 + \\ &+ \mathbf{y}_0 \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) + \mathbf{x}(t, \omega_0) \mathbf{y}_0^\dagger . \end{aligned} \quad (6.58)$$

Para obtermos a matriz de covariância das envolventes atômicas lentamente variáveis,  $C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0)$ , subtraímos os valores médios da matriz de correlação,  $G(t, t, \omega_0, \omega'_0)$ , ou seja:

$$C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) = G(t, t, \omega_0, \omega'_0) - \mathbf{x}(t, \omega_0) \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle . \quad (6.59)$$

Portanto, no estado estacionário, o valor médio da matriz de covariância é dado pela seguinte expressão:

$$\langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} = \langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} - \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} , \quad (6.60)$$

onde o termo  $\langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee}$  é o termo que resulta da Eq.(6.58) avaliada no estado estacionário, que pode ser obtido a partir da seguinte equação matricial:

$$\begin{aligned} -\mathbf{y}_0 \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) - \mathbf{x}(t, \omega_0) \mathbf{y}_0^\dagger &= \mathcal{A}\langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} + \langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{A}^\dagger + \\ &+ 2b_1 \mathcal{N}_1 \langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_1 + \\ &+ 2b_2 \mathcal{N}_2 \langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_2 + \\ &+ 2b_{12} \mathcal{N}_1 \langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_2 + \\ &+ 2b_{12} \mathcal{N}_2 \langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_1 . \end{aligned} \quad (6.61)$$

Da Eq.(6.59) vemos que:

$$\langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} = \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} + \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} , \quad (6.62)$$

de modo que substituindo-a na Eq.(6.61) chegamos à seguinte expressão que

permite calcular a matriz de covariância das envolventes atômicas lentamente variáveis em 2ª ordem:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}\langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} + \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{A}^\dagger + 2b_1 \mathcal{N}_1 \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_1 + \\
& + 2b_2 \mathcal{N}_2 \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_2 + 2b_{12} \mathcal{N}_1 \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_2 + \\
& + 2b_{12} \mathcal{N}_2 \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_1 = \\
& = -\mathcal{A}\langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} - \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{A}^\dagger - \\
& - 2b_1 \mathcal{N}_1 \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_1 - 2b_2 \mathcal{N}_2 \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_2 - \\
& - 2b_{12} \mathcal{N}_1 \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_2 - 2b_{12} \mathcal{N}_2 \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_1 - \\
& - \mathbf{y}_0 \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} - \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \mathbf{y}_0^\dagger . \tag{6.63}
\end{aligned}$$

Dado que no estado estacionário  $\mathcal{A}\langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} = -[\mathbf{y}_0]$ , a expressão que nos permite calcular a matriz de covariância, no mesmo estado, é dada pela seguinte equação:

$$\langle G(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} = \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} + \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} , \tag{6.64}$$

levando à seguinte expressão que permite calcular a matriz de covariância das variáveis atômicas em 2ª ordem:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}\langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} + \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{A}^\dagger + 2b_1 \mathcal{N}_1 \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_1 + \\
& + 2b_2 \mathcal{N}_2 \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_2 + 2b_{12} \mathcal{N}_1 \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_2 + \\
& + 2b_{12} \mathcal{N}_2 \langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_1 = \\
& = -2b_1 \mathcal{N}_1 \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_1 - \\
& - 2b_2 \mathcal{N}_2 \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_2 - 2b_{12} \mathcal{N}_1 \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_2 - \\
& - 2b_{12} \mathcal{N}_2 \langle \mathbf{x}(t, \omega_0) \rangle_{ee} \langle \mathbf{x}^\dagger(t, \omega'_0) \rangle_{ee} \mathcal{N}_1 . \tag{6.65}
\end{aligned}$$

Para podermos calcular a matriz de correlação, no estado estacionário,  $\langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee}$ , a partir da Eq.(6.65), é necessário que passemos ao espaço de Liouville, onde os elementos dessa matriz são ordenados em forma vetorial seguindo uma determinada ordem até o fim do cálculo. Com esse fim, definem-se operadores generalizados, à esquerda  $\mathcal{L}(O)$  e à direita  $\mathcal{R}(O)$ <sup>1</sup>. Assim, definindo operadores apropriados, a Eq.(6.65) pode ser escrita, simplesmente, como:

$$\mathbf{M}\langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} = \mathbf{N} , \tag{6.66}$$

<sup>1</sup>O operador esquerda no espaço de Liouville,  $\mathcal{L}(O)$ , é uma função de um operador que age pela esquerda da matriz de correlação e, operador direita,  $\mathcal{R}(O)$ , no caso complementar.

onde  $\mathbf{M}$  é uma matriz com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \mathcal{L}(\mathcal{A}) + \mathcal{R}(\mathcal{A}^\dagger) + 2b_1\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)\mathcal{R}(\mathcal{N}_1) + 2b_2\mathcal{L}(\mathcal{N}_2)\mathcal{R}(\mathcal{N}_2) + \\ & + 2b_{12}\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)\mathcal{R}(\mathcal{N}_2) + 2b_{12}\mathcal{L}(\mathcal{N}_2)\mathcal{R}(\mathcal{N}_1) , \end{aligned} \quad (6.67)$$

e o vetor  $\mathbf{N}$  corresponde ao ordenamento em forma de vetor dos elementos da matriz resultante do lado direito da Eq.(6.65).

A solução da Eq.(6.66) é direta e se escreve:

$$\langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{N} . \quad (6.68)$$

Uma vez obtido o vetor com os elementos da matriz de correlação escrevemos, novamente, em forma matricial.

## 6.4.2 Espectro de ruído

O cálculo do espectro de ruído dos campos que interagem com os átomos é deduzido a partir da matriz de covariância avaliada em tempos diferentes, ou seja:

$$C_2(\tau, \omega_0, \omega'_0) = G(\tau, \omega_0, \omega'_0) - \mathbf{x}(\tau, \omega_0)\langle \mathbf{x}^\dagger(0, \omega'_0) \rangle , \quad (6.69)$$

em conjunto com o teorema da regressão<sup>2</sup>, o qual diz que a evolução temporal da função de correlação  $G(\tau, \omega_0, \omega'_0)$  para  $\tau > 0$  é governada pelas mesmas leis que a evolução temporal da média. Isto é uma consequência da natureza linear Markoviana do problema. Assim;

$$d[G(\tau, \omega_0, \omega'_0)] = d\langle \mathbf{x}(\tau, \omega_0)\mathbf{x}^\dagger(0, \omega'_0) \rangle . \quad (6.70)$$

Utilizando o teorema da regressão, segue-se que:

$$\begin{aligned} d\langle C_2(\tau, \omega_0, \omega'_0) \rangle &= d\langle G(\tau, \omega_0, \omega'_0) \rangle - d\langle \mathbf{x}(\tau, \omega_0)\mathbf{x}^\dagger(0, \omega'_0) \rangle \\ &= \langle d\mathbf{x}(\tau, \omega_0)\mathbf{x}^\dagger(0, \omega'_0) \rangle - \mathcal{A}\langle \mathbf{x}(\tau, \omega_0)\mathbf{x}^\dagger(0, \omega'_0) \rangle - \mathbf{y}_0\langle \mathbf{x}^\dagger(0, \omega'_0) \rangle \\ &= \left\langle \left[ i\Theta_{12} + i\Phi_{12}^{(b)} - \frac{1}{2}\Phi_{12}^{(c)} + \mathcal{B}_{at.} \right] \mathbf{x}(\tau, \omega_0)\mathbf{x}^\dagger(0, \omega'_0)d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{y}_0\mathbf{x}^\dagger(0, \omega'_0)d\tau \right\rangle - \{ \mathcal{A}\langle \mathbf{x}(\tau, \omega_0)\mathbf{x}^\dagger(0, \omega'_0) \rangle - \\ &\quad - \mathbf{y}_0\langle \mathbf{x}^\dagger(0, \omega'_0) \rangle \} d\tau \\ &= \{ \mathcal{A}\langle G(\tau, \omega_0, \omega'_0) \rangle - \mathcal{A}\langle \mathbf{x}(\tau, \omega_0)\mathbf{x}^\dagger(0, \omega'_0) \rangle \} d\tau . \end{aligned} \quad (6.71)$$

<sup>2</sup>M. K. Olsen, *Notas de Aula do curso de Ótica Quântica*, IFUSP, 1998.

Na derivação da equação anterior usamos a Eq.(6.53) e reordenamos os termos encontrados. Assim, chegamos à seguinte expressão para a dinâmica da matriz de covariância em dois tempos:

$$\frac{d}{d\tau} \langle C_2(\tau, \omega_0, \omega'_0) \rangle = \mathcal{A} \langle C_2(\tau, \omega_0, \omega'_0) \rangle . \quad (6.72)$$

A transformada de Laplace, que designaremos como  $\mathcal{G}(s)$ , da equação anterior nos leva à seguinte expressão:

$$[\mathcal{A} + i\Omega] \mathcal{G}(s) = -\langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee} , \quad (6.73)$$

onde  $\langle C_2(t, t, \omega_0, \omega'_0) \rangle_{ee}$  é obtida a partir da Eq.(6.66). A transformada de Laplace é equivalente à transformada de Fourier quando o estado estacionário é alcançado e nos dá o espectro de ruído dos campos se fizermos  $s = i\Omega$ , com  $\Omega$  a frequência de análise. Mais especificamente, devemos considerar a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \langle C_2(\tau, \omega_0, \omega'_0) \rangle e^{i\Omega\tau} d\tau &= \int_0^{\infty} \langle C_2(\tau, \omega_0, \omega'_0) \rangle e^{i\Omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} \langle C_2(-\tau) \rangle e^{-i\Omega\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \langle C_2(\tau, \omega_0, \omega'_0) \rangle e^{i\Omega\tau} d\tau + \\ &\quad + \int_0^{\infty} \langle C_2(\tau, \omega_0, \omega'_0) \rangle^\dagger e^{-i\Omega\tau} d\tau \\ &= \mathcal{G}(i\Omega) + \mathcal{G}^\dagger(-i\Omega) . \end{aligned} \quad (6.74)$$

Fazendo uso das expressões dadas pela Eq.(6.74), vemos que o espectro de ruído de intensidade do campo gerado pelo laser  $L_1$ , ver Eq.(2.28), é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} S_{P11}(\Omega) &= 2\beta^2 \mathcal{E}_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{01} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'_{01} W_1(\omega_{01}) W_1(\omega'_{01}) \times \\ &\quad \times \Re e \left\{ [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega'_{01})]_{33} + [\mathcal{G}^\dagger(i\Omega; \omega_{01}, \omega'_{01})]_{44} - \right. \\ &\quad \left. - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega'_{01})]_{34} - [\mathcal{G}^\dagger(i\Omega; \omega_{01}, \omega'_{01})]_{43} \right\} , \end{aligned} \quad (6.75)$$

onde usamos a propriedade  $[\mathcal{G}^\dagger(-i\Omega)]_{jk} = [\mathcal{G}(i\Omega)]_{kj}^*$  dos elementos da matriz de covariância.

Uma análise similar nos leva à seguinte expressão para o ruído da quadratura fase do campo gerado pelo laser  $L_1$  (ver Eq.(2.34):

$$S_{Q11}(\Omega) = \frac{\beta^2}{2c^2\epsilon_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{01} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'_{01} W_1(\omega_{01}) W_1(\omega'_{01}) \times \\ \times \Re e \left\{ [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega'_{01})]_{33} + [\mathcal{G}^\dagger(i\Omega; \omega_{01}, \omega'_{01})]_{44} + \right. \\ \left. + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega'_{01})]_{34} + [\mathcal{G}^\dagger(i\Omega; \omega_{01}, \omega'_{01})]_{43} \right\}. \quad (6.76)$$

Fazendo uma análise similar para o campo gerado pelo laser  $L_2$ , temos que os espectros de ruído de intensidade e da quadratura fase, após interagir com os átomos, são dados pelas seguintes expressões:

$$S_{P22}(\Omega) = 2\beta^2\mathcal{E}_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{02} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'_{02} W_2(\omega_{02}) W_2(\omega'_{02}) \times \\ \times \Re e \left\{ [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega'_{02})]_{55} + [\mathcal{G}^\dagger(i\Omega; \omega_{02}, \omega'_{02})]_{66} - \right. \\ \left. - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega'_{02})]_{56} - [\mathcal{G}^\dagger(i\Omega; \omega_{02}, \omega'_{02})]_{65} \right\} \quad (6.77)$$

e

$$S_{Q22}(\Omega) = \frac{\beta^2}{2c^2\epsilon_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{02} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'_{02} W_2(\omega_{02}) W_2(\omega'_{02}) \times \\ \times \Re e \left\{ [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega'_{02})]_{55} + [\mathcal{G}^\dagger(i\Omega; \omega_{02}, \omega'_{02})]_{66} + \right. \\ \left. + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega'_{02})]_{56} + [\mathcal{G}^\dagger(i\Omega; \omega_{02}, \omega'_{02})]_{65} \right\}, \quad (6.78)$$

respectivamente.

Fazendo o mesmo tratamento para as correlações, chegamos a:

$$S_{P12}(\Omega) = \beta^2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{01} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{02} W_1(\omega_{01}) W_2(\omega_{02}) \times \\ \times \left\{ [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{46} + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{64}^* + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{35} + \right. \\ \left. + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{53}^* - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{45} - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{54}^* - \right. \\ \left. - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{36} - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{63}^* \right\} \quad (6.79)$$

e

$$S_{P21}(\Omega) = \beta^2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{02} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{01} W_2(\omega_{02}) W_1(\omega_{01}) \times \\ \times \left\{ [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{64} + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{46}^* + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{53} + \right. \\ \left. + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{35}^* - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{63} - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{36}^* - \right. \\ \left. - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{54} - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{45}^* \right\}, \quad (6.80)$$

para as intensidades e:

$$S_{Q12}(\Omega) = \frac{\beta^2}{4c^2\varepsilon_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{01} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{02} W_1(\omega_{01}) W_2(\omega_{02}) \times \\ \times \left\{ [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{46} + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{64}^* + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{35} + \right. \\ \left. + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{53}^* + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{45} + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{54}^* + \right. \\ \left. + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{36} + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{01}, \omega_{02})]_{63}^* \right\} \quad (6.81)$$

e

$$S_{Q21}(\Omega) = \frac{\beta^2}{4c^2\varepsilon_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{02} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{01} W_2(\omega_{02}) W_1(\omega_{01}) \times \\ \times \left\{ [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{64} + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{46}^* + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{53} + \right. \\ \left. + [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{35}^* - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{63} - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{36}^* - \right. \\ \left. - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{54} - [\mathcal{G}(i\Omega; \omega_{02}, \omega_{01})]_{45}^* \right\}, \quad (6.82)$$

para as fases dos campos detetados, respectivamente.

Tal como no modelo quântico apresentado no Cap.5, desenvolvemos expressões para a soma e a subtração do ruído de intensidade entre eles. Explícitamente:

$$S_{P+}(\Omega) = S_{P11}(\Omega) + S_{P22}(\Omega) + S_{P12}(\Omega) + S_{P21}(\Omega), \quad (6.83)$$

$$S_{P-}(\Omega) = S_{P11}(\Omega) + S_{P22}(\Omega) - S_{P12}(\Omega) - S_{P21}(\Omega), \quad (6.84)$$

com expressões similares para a quadratura fase.

Por último, definimos o seguinte coeficiente de correlação:

$$\mathcal{C}_{P12}(\Omega) = \frac{S_{P+}(\Omega) - S_{P-}(\Omega)}{S_{P+}(\Omega) + S_{P-}(\Omega)} \times \frac{S_{P11}(\Omega) + S_{P22}(\Omega)}{2\sqrt{S_{P11}(\Omega)S_{P22}(\Omega)}}, \quad (6.85)$$

cujos valores se limitam ao intervalo  $[-1, 1]$ . Uma expressão similar resulta para o caso do coeficiente de correlação da fase  $\mathcal{C}_{Q12}(\Omega)$ .

As previsões teóricas obtidas com a implementação deste modelo estocástico são apresentadas a seguir.

## 6.5 Previsões teóricas no estado estacionário

Nesta seção apresentamos as previsões teóricas, para o estado estacionário, do modelo estocástico que acabamos de desenvolver.

Para começar, na Fig.6.1 apresentamos as curvas dos valores médios, no estado estacionário, da parte imaginária (absorção) das envolventes atômicas lentamente variáveis  $\langle \mathcal{P}_1(t) \rangle_{ee}$  [curva (a)] e  $\langle \mathcal{P}_2(t) \rangle_{ee}$  [curva (b)], em função da dessintonia do campo sonda  $\Delta_{L2}$ . Para a obtenção dessas curvas usamos, novamente,  $\Gamma = 2\pi \times (6 \text{ MHz})$  para a largura natural do estado excitado e  $\Gamma_{12} = 2\pi \times (100 \text{ kHz})$  para a taxa de perda de coerência entre os estados fundamentais. Os valores das Lorentzianas espectrais dos campos de bombeio (dessintonia fixa) e sonda (dessintonia variável) foram tomados iguais;  $b_1 = b_2 = 2\pi \times (1 \text{ MHz})$  e assumimos as fases dos campos dessacopladas ou seja,  $b_{12} = 0$ .

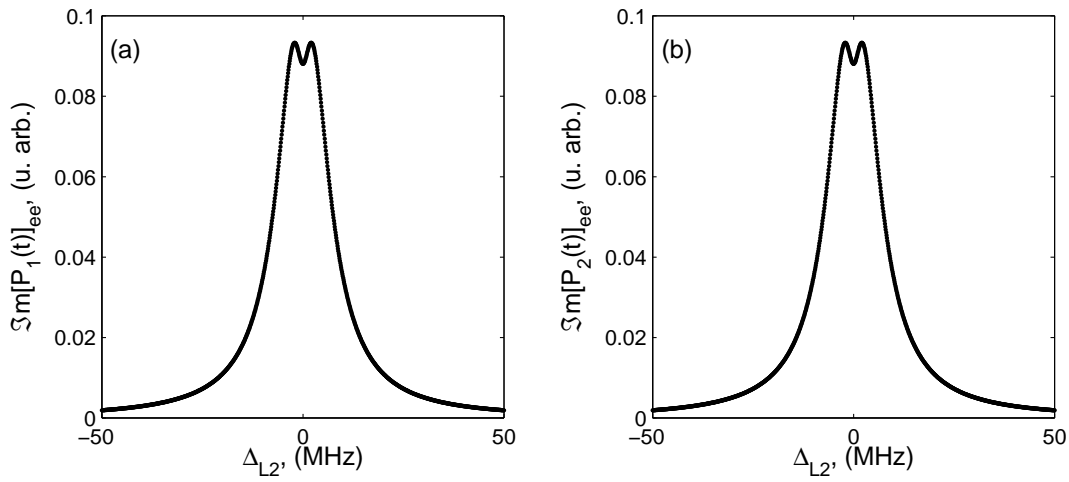


Figura 6.1: Parte imaginária (absorção), no estado estacionário, das envolventes atômicas lentamente variáveis  $\langle \mathcal{P}_1(t) \rangle_{ee}$  e  $\langle \mathcal{P}_2(t) \rangle_{ee}$ . Taxas de Rabi  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,2 \times \Gamma$ .

As taxas de Rabi usadas para obtenção das curvas da Fig.6.1 foram tomadas iguais e escolhidas de tal modo que fosse possível observar o sinal de EIT, sendo neste caso  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,2 \times \Gamma$ . Como podemos ver nessa figura, ambas envolventes lentamente variáveis apresentam um pequeno sinal de transparência induzida na perfeita sintonia Raman. A amplitude desse sinal aumenta consideravelmente quando os campos são considerados com as fases acopladas, i.e.,  $b_{12} \neq 0$ .

Como o nosso interesse está centrado na estatística dos campos após a interação com os átomos, na Fig.6.2 apresentamos o espectro de ruído de intensidade [curva (a)] e da quadratura fase [curva (c)] do campo de bombeio  $S_{P11}(\Omega)$  e  $S_{Q11}(\Omega)$ , respectivamente, em função da dessintonia do campo sonda  $\Delta_{L2}$ . As curvas (b) e (d) são as quantidades correspondentes para o campo sonda ou seja,  $S_{P22}(\Omega)$  (intensidade) e  $S_{Q22}(\Omega)$  (fase). Para estas figuras a frequência de análise é  $\Omega = 2\pi \times (2 \text{ MHz})$  e os outros parâmetros são os mesmos da Fig.6.1.

Como podemos observar na Fig.6.2, o espectro de ruído de intensidade de ambos os campos, após interagir com os átomos [curvas (a) e (b)] apresenta



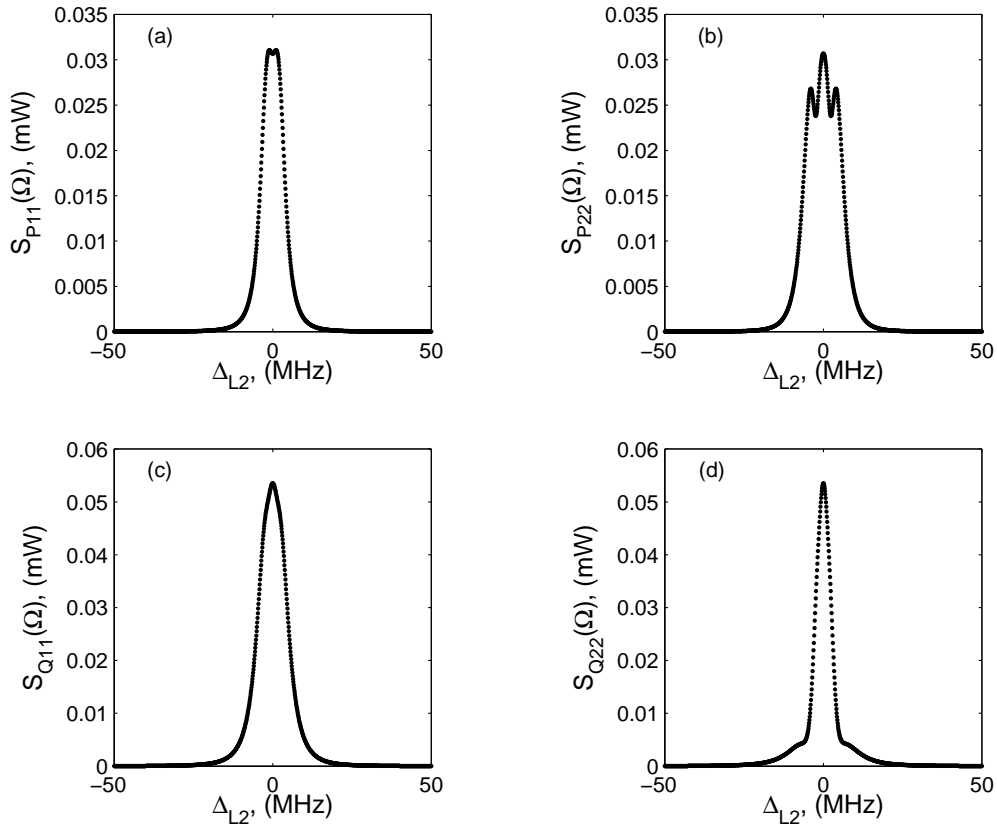


Figura 6.2: Espectro de ruído de intensidade e de fase dos campos detetados. Campo de bombeio: (a)  $S_{P11}(\Omega)$  (intensidade) e (c)  $S_{Q11}(\Omega)$  (Fase). Campo sonda: (b)  $S_{P22}(\Omega)$  (intensidade) e (d)  $S_{Q22}(\Omega)$  (Fase). frequência de análise  $\Omega = 2\pi \times (2 \text{ MHz})$ .

um excesso de ruído na condição de ressonância da EIT. Um comportamento similar é observado para o espectro de ruído da quadratura fase de ambos os campos [curvas (c) e (d)].

Usando os mesmos parâmetros anteriores obtemos o coeficiente de correlação do ruído de intensidade  $\mathcal{C}_{P12}(\Omega)$  [curva (a)] e da quadratura fase  $\mathcal{C}_{Q12}(\Omega)$  [curva (b)] entre os campos de bombeio e sonda, correspondentes às curvas da Figs.6.2. Estas curvas são apresentadas na Fig.6.3.

Como podemos ver nas curvas da Fig.6.3, para perfeita ressonância da transparência induzida e para esses parâmetros (baixas intensidades comparadas com a intensidade de saturação do meio atômico e frequência de análise da ordem da largura espectral dos campos), este modelo prevê a existência de uma elevada correlação entre o ruído de intensidade dos campos de bombeio e sonda detetados [curva (a)]. Esta correlação se mantém pelo menos até uma dessintonia do campo sonda da ordem da largura de linha do sinal de transparência induzida. Para dessintonias maiores os campos detetados ficam

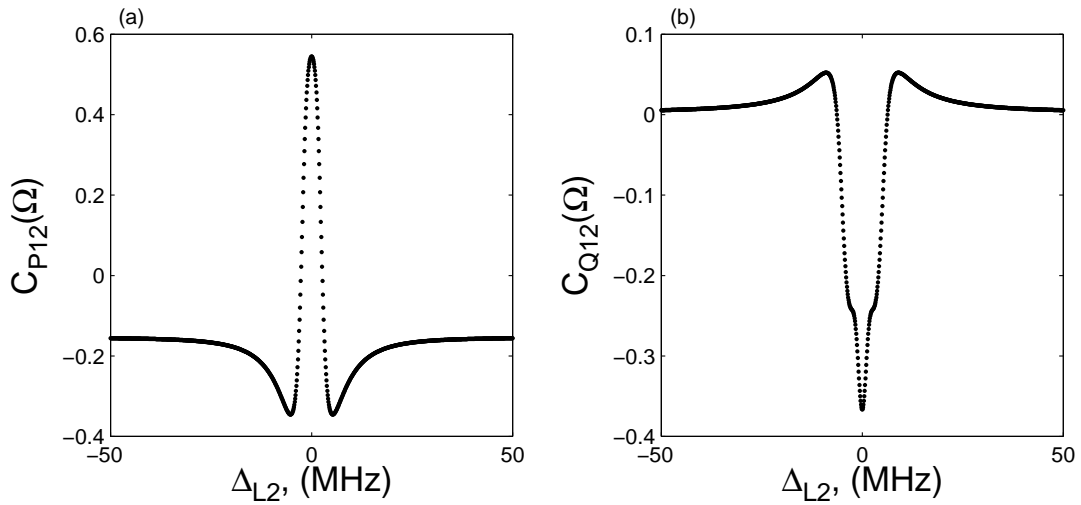


Figura 6.3: Curva (a): Coeficiente de correlação do ruído de intensidade  $\mathcal{C}_{P12}(\Omega)$  e Curva (b): Coeficiente de correlação de fase  $\mathcal{C}_{Q12}(\Omega)$ , entre os campos de bombeio e sonda detetados.

anti-correlacionados.

Já as previsões deste modelo para a correlação entre o ruído de fase dos campos detetados, para a mesma situação, curva (b) da Fig.6.3, apresenta um comportamento contrário ao da correlação de intensidade entre os mesmos. Como podemos ver nessa figura, na perfeita ressonância de EIT, os campos detetados apresentam uma acentuada anti-correlação, sendo que, para dessintonias do sonda maiores que a largura de linha do sinal de transparência induzida, os campos ficam correlacionados. Além disso, estes resultados também são contrários aos resultados experimentais apresentados nas curvas das Fig.4.18, onde vemos que quando os campos apresentam correlação de intensidade, [curva (a) da Fig.4.18], também apresentam correlação de fase. Esta última divergência, sugere um estudo mais aprofundado, tanto teórico quanto experimental, desse comportamento.

Os resultados apresentados nas Figs.6.2 e Fig.6.3 pertencem ao que chamaremos de “regime de baixas intensidades”, onde “baixas intensidades” quer dizer que as intensidades dos campos de bombeio e sonda que interagem com os átomos são menores do que a intensidade de saturação do meio atômico utilizado. Este regime é caracterizado, de maneira geral, pela correlação de ruído de intensidade entre os campos de bombeio e sonda detetados (após interagir com os átomos) na perfeita ressonância de EIT. Contrário a este regime temos o “regime de altas intensidades”, caracterizado, de maneira geral, pela anti-correlação de intensidade entre os campos de bombeio e sonda detetados, para a mesma situação de EIT.

Contudo, a caracterização desses dois regimes deve ser entendida com base

no comportamento da correlação ou anti-correlação, para essa dada condição de transparência induzida, levando em conta também a frequência de análise. Para entendermos melhor esta idéia, na Fig.6.4 apresentamos curvas para o coeficiente de correlação de intensidade  $\mathcal{C}_{P12}(\Omega)$  (esquerda) e de fase  $\mathcal{C}_{Q12}(\Omega)$  (direita), entre os campos detetados e na perfeita ressonância de EIT, para diferentes valores das frequências de Rabi e em função da frequência de análise. Neste caso consideramos perfeita sintonia dos campos de bombeio e sonda  $\Delta_{L1} = 0$  e  $\Delta_{L2} = 0$ , respectivamente.

Das curvas da esquerda da Fig.6.4, podemos ver claramente que as curvas vermelha ( $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,2 \times \Gamma$ ), azul ( $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,4 \times \Gamma$ ) e verde ( $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,5 \times \Gamma$ ) correspondem ao regime que chamamos de baixas intensidades, dado que, para todo o intervalo de frequências escolhido, o coeficiente de correlação de intensidade indica que os campos detetados estão correlacionados. Assim, para os parâmetros escolhidos podemos dizer que a curva de cor verde corresponde ao máximo valor da intensidade dos campos incidentes para as quais eles ficam correlacionados em intensidade. Relacionando essa intensidade à taxa de Rabi  $\Omega_0$ , temos que campos incidentes com taxas de Rabi menores do que  $\Omega_0$  apresentam correlação de intensidade. Se olharmos a curva de cor verde, vemos que o valor mínimo da correlação é praticamente zero, ou seja nesse caso os campos não são correlacionados. A frequência de análise para a qual esse valor é alcançado pode ser designada como  $\Omega_{\Omega_0}$ .

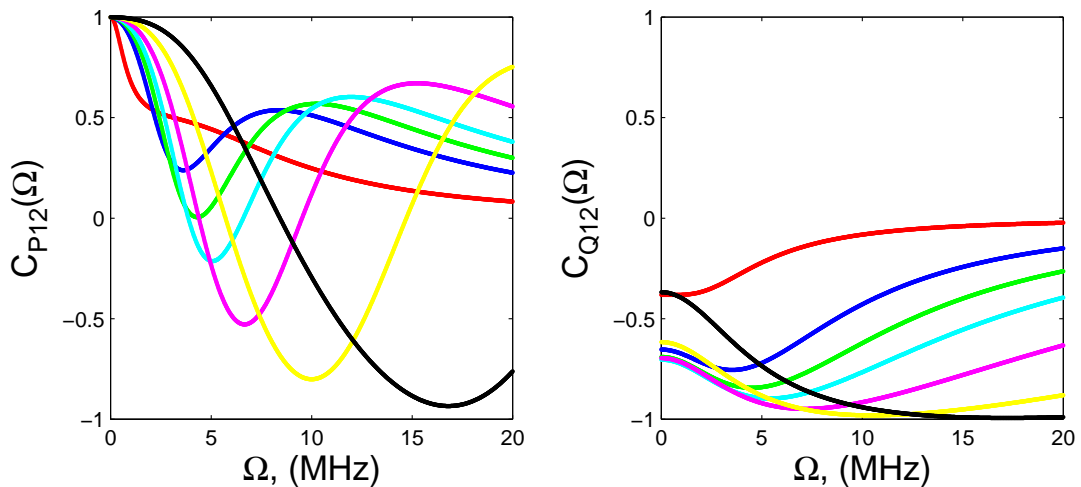


Figura 6.4: Esquerda: Coeficiente de correlação de intensidade  $\mathcal{C}_{P12}(\Omega)$  e Direita: Coeficiente de correlação de fase  $\mathcal{C}_{Q12}(\Omega)$ , em função da frequência de análise  $\Omega$ , para diferentes valores das frequências de Rabi, com  $\Delta_{L1} = \Delta_{L2} = 0$ .

Ainda na figura da esquerda, as curvas de cor cian ( $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,6 \times \Gamma$ ), magenta ( $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,8 \times \Gamma$ ), amarela ( $\Omega_1 = \Omega_2 = 1,2 \times \Gamma$ ) e preta ( $\Omega_1 = \Omega_2 = 2,0 \times \Gamma$ ) da Fig.6.4 podem ser agora analisadas em função das

intensidades dos campos e da frequência  $\Omega_{\Omega_0}$ . Como podemos ver, para intensidades dos campos tais que as taxas de Rabi sejam maiores do que  $\Omega_0$ , se a análise da correlação de intensidade se faz em frequências de análise menores do que  $\Omega_{\Omega_0}$ , os campos apresentam correlação. Por outro lado, se a análise é realizada para frequências maiores do que  $\Omega_{\Omega_0}$  existe, a partir dessa frequência, um determinado intervalo das mesmas (o comprimento desse intervalo é diretamente proporcional à intensidade dos campos) onde os campos evidenciam uma anti-correlação de intensidade. Para frequências fora desse intervalo, os campos ficam novamente correlacionados. Qualquer uma destas últimas curvas é equivalente, qualitativamente falando, às curvas da direita (inferior) da Fig.4.13, onde apresentamos resultados experimentais para uma das medidas do coeficiente de correlação de intensidade entre os feixes detetados em função da frequência de análise, mostrando assim que o modelo prevê a correlação de intensidade entre os feixes como função da frequência de análise. No entanto, persistem discrepâncias a serem consideradas: i) teoricamente, as correlações não desaparecem para frequências de análise da ordem de  $16 \text{ MHz}$ ; ii) para frequências de análise baixas os feixes sempre apresentam correlação de intensidade e não se forma um patamar de anti-correlação, mas apenas um máximo de anti-correlação que se desloca com o aumento da frequência de análise e iii) a frequência de análise em que ocorre a passagem de correlação para anti-correlação aumenta muito com a frequência de análise.

Com relação ao coeficiente de correlação de fase, curvas da direita da Fig.6.4, o comportamento é bem diferente: para todo o intervalo de frequências de análises escolhido e para as frequências de Rabi consideradas, os campos apresentam anti-correlação de fase. Para as intensidades em que os campos apresentam só correlação de intensidade (curvas vermelha, azul e verde), os mesmos apresentam anti-correlação de fase, tendendo a ficar não correlacionados para frequências de análise grandes. Para intensidades nas que os campos apresentam correlação e anti-correlação de intensidade (curvas cian, magenta, amarela e preta), dependendo da frequência de análise, os mesmos apresentam, novamente, só anti-correlação de fase, mas neste caso tendem a ficar perfeitamente anti-correlacionados à medida que a frequência de análise e a frequência de Rabi aumenta.

Se aumentamos as larguras das Lorentzianas espectrais dos campos, digamos  $b_1 = b_2 = 2\pi \times (3 \text{ MHz})$ , e graficamos as curvas correspondentes às da Fig.6.4, a forma das mesmas se mantém. No entanto, para todas as intensidades evidenciamos um comportamento com intervalos de correlação-anti-correlação-correlação, sendo esses intervalos proporcionais à intensidade dos campos.

As curvas da Fig.6.4 foram obtidas assumindo que os campos de bombeio e sonda eram ressonantes com as transições atômicas que excitam ou desexcitam  $\Delta_{L1} = 0$  e  $\Delta_{L2} = 0$ , respectivamente. Vamos supor agora que o campo de bombeio é estabilizado numa dessintonia  $\Delta_{L1} = \Gamma$  e o campo sonda na ressonância

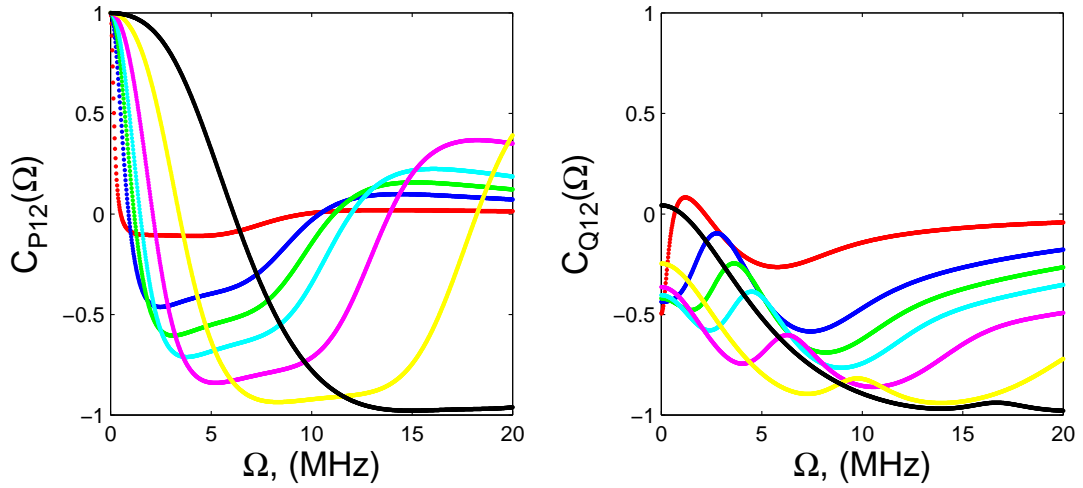


Figura 6.5: Esquerda: Coeficiente de correlação de intensidade  $\mathcal{C}_{P12}(\Omega)$  e Direita: Coeficiente de correlação de fase  $\mathcal{C}_{Q12}(\Omega)$ , em função da frequência de análise  $\Omega$ , para diferentes valores das frequência de Rabi, com  $\Delta_{L1} = \Delta_{L2} = \Gamma$ .

da transparência induzida, como feito experimentalmente. Isto significa que a transição de dois fótons será fechada por aqueles átomos cuja dessintonia com o campo sonda seja a mesma que a do campo de bombeio, ou seja,  $\Delta_{L2} = \Gamma$ . A influência desta mudança na correlação entre os campos de bombeio e sonda detetados pode ser vista na Fig.6.5, onde apresentamos curvas equivalentes às da Fig.6.4, para os mesmos parâmetros e para o mesmo intervalo de frequências de análise.

Das curvas da esquerda da Fig.6.5 vemos que, no caso do coeficiente de correlação de intensidade, ao considerarmos a transição de dois fótons sendo fechada por átomos não ressonantes com os campos, a passagem de correlação para anti-correlação se dá em frequências de análise bem menores do que no caso da Fig.6.4. Além disso, aparece um patamar de anti-correlação entre os feixes para todas as frequências de Rabi consideradas mostrando que, a medida que aumenta a frequência de Rabi, os feixes tendem a ficar perfeitamente anti-correlacionados. Por outro lado, das curvas da direita da mesma Fig.6.5, vemos que nessas condições, os campos ainda apresentam anti-correlação de fase para a maioria das frequência de Rabi consideradas e para todo o intervalo de frequência escolhidas.

Dos resultados discutidos acima vemos que, uma integração sobre o perfil Doppler, torna-se necessária neste estajo dos cálculos.

### 6.5.1 Estrutura internas

Nas últimas figuras vimos como varia o coeficiente de correlação do ruído de intensidade entre os campos de bombeio e sonda na condição de transparência, i.e.,  $\delta_R = 0$ , em função da frequência de análise e para diferentes valores de intensidades dos campos incidentes. Nas figuras seguintes veremos como se comportam o sinal do ruído da soma e da diferença de intensidade dos campos fazendo uma varredura “local” em torno da ressonância do campo sonda  $\delta_{L2}$ , com o campo de bombeio ressonante  $\Delta_{L1} = 0$ .

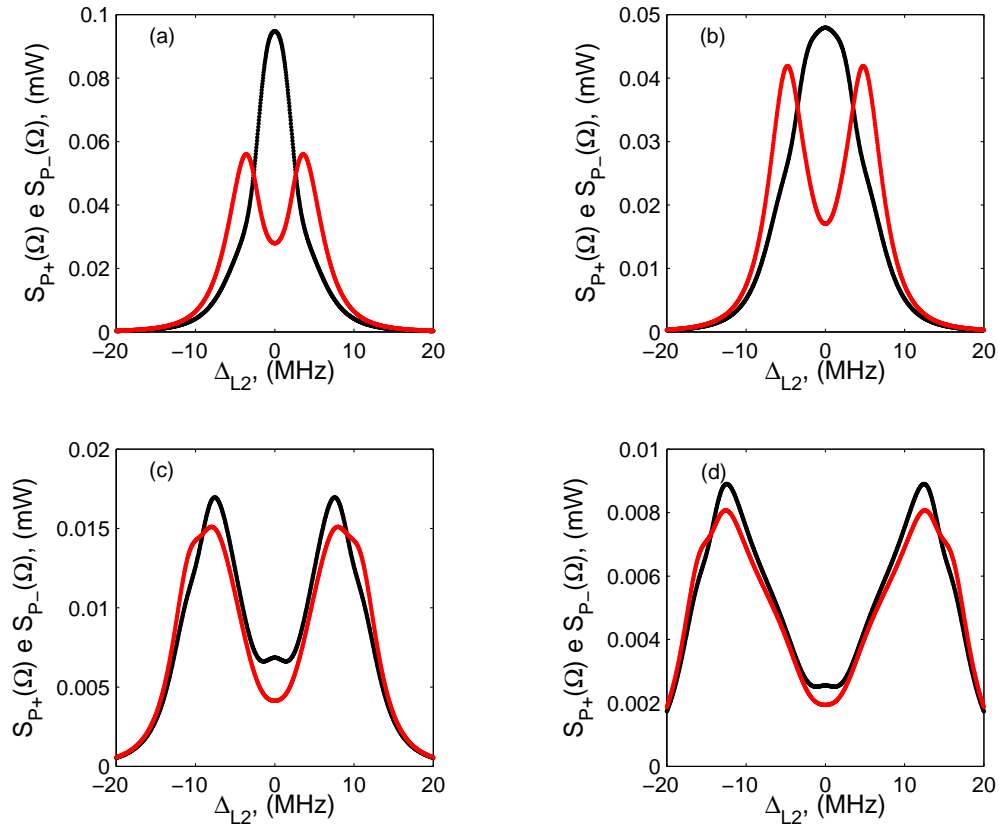


Figura 6.6: Sinais de ruído da soma  $S_{P+}(\Omega)$  (curva preta) e do ruído da diferença  $S_{P-}(\Omega)$  (curva vermelha) de intensidade dos campos de bombeio e sonda em função da dessintonia do campo sonda  $\Delta_{L2}$ . (a)  $\Omega = 2$  MHz; (b)  $\Omega = 4$  MHz; (c)  $\Omega = 10$  MHz e (d)  $\Omega = 15$  MHz.

Para começar, na Fig.6.6 mostramos o comportamento do sinal de ruído da soma (curva preta) e da diferença (curva vermelha) de intensidade dos campos para frequências de Rabi  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,2 \times \Gamma$ , em função da dessintonia do campo sonda  $\Delta_{L2}$ , para diferentes valores de frequência de análise  $\Omega$ . Para as frequências de Rabi consideradas, a Fig.6.6 mostra que, para uma frequência de análise da ordem da largura das Lorentzianas espectrais dos campos [curva (a)], o sinal de ruído da soma  $S_{P+}(\Omega)$  de intensidade dos campos apresenta o excesso

de ruído na condição de transparência induzida, i.e.,  $\Delta_{L2} = 0$  e, à medida que a dessintonia do campo aumenta, o ruído diminui simetricamente em torno desse ponto. À medida que a frequência de análise aumenta [curvas (b) a (d)] o excesso de ruído, do mesmo sinal, começa a se distribuir em torno da condição de ressonância até ser praticamente igual ao sinal do ruído da diferença. Já o sinal de ruído da diferença,  $S_{P-}(\Omega)$ , apresenta o excesso de ruído em posições simétricas em torno da condição de transparência, no entanto nessa condição ainda existe um pequeno excesso de ruído. Vemos que à medida que aumenta a frequência de análise, mantendo fixas as intensidades dos campos incidentes, estes tendem a ficar não correlacionados em intensidade. Esta curvas são as equivalentes às curvas da Fig.4.15.

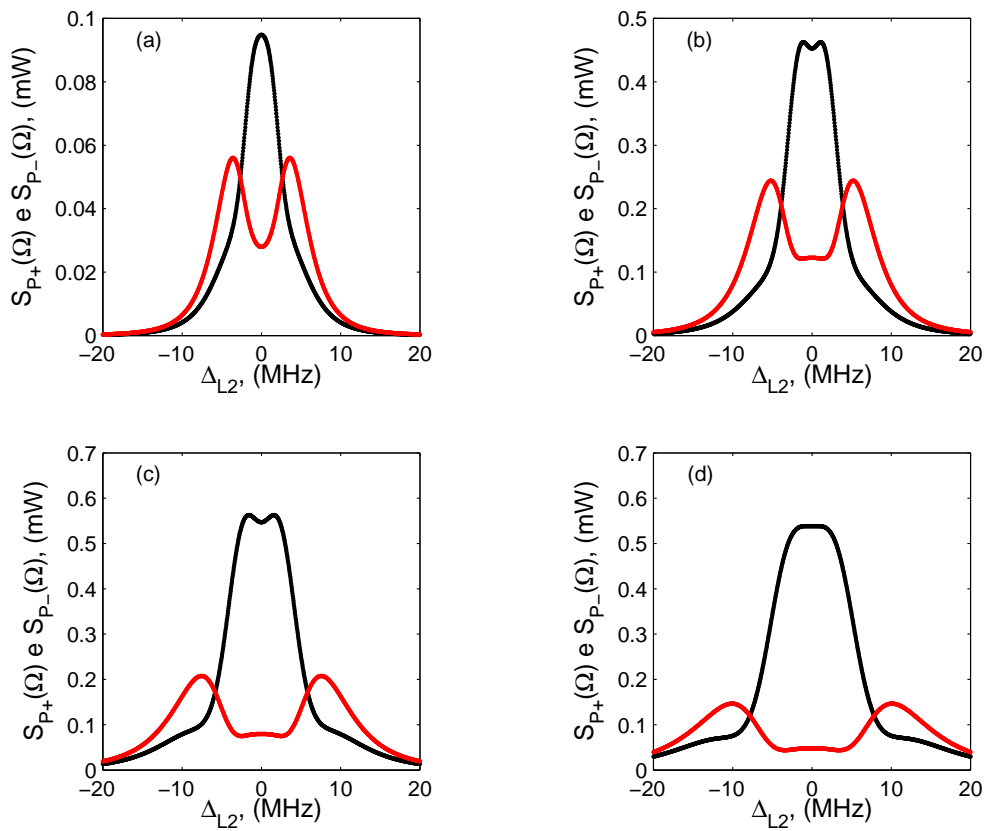


Figura 6.7: Sinais de ruído da soma  $S_{P+}(\Omega)$  (curva preta) e da diferença  $S_{P-}(\Omega)$  (curva vermelha) de intensidade dos campos de bombeio e sonda em função da dessintonia do campo sonda  $\Delta_{L2}$ . (a)  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 2 \times \Gamma$ ; (b)  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 4 \times \Gamma$ ; (c)  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 6 \times \Gamma$  e (d)  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 8 \times \Gamma$ .

Continuando, na Fig.6.7 apresentamos, novamente, curvas do sinal do ruído da soma  $S_{P+}(\Omega)$  e da diferença  $S_{P-}(\Omega)$  de intensidade dos campos, desta vez para diferentes valores de intensidade dos campos incidentes, em função da

dessintonia do sonda  $\Delta_{L2}$ , com o campo de bombeio em ressonância. Estas curvas foram obtidas usando uma frequência de análise  $\Omega = 2 \text{ MHz}$ . Estas curvas são as equivalentes às da Fig.4.16.

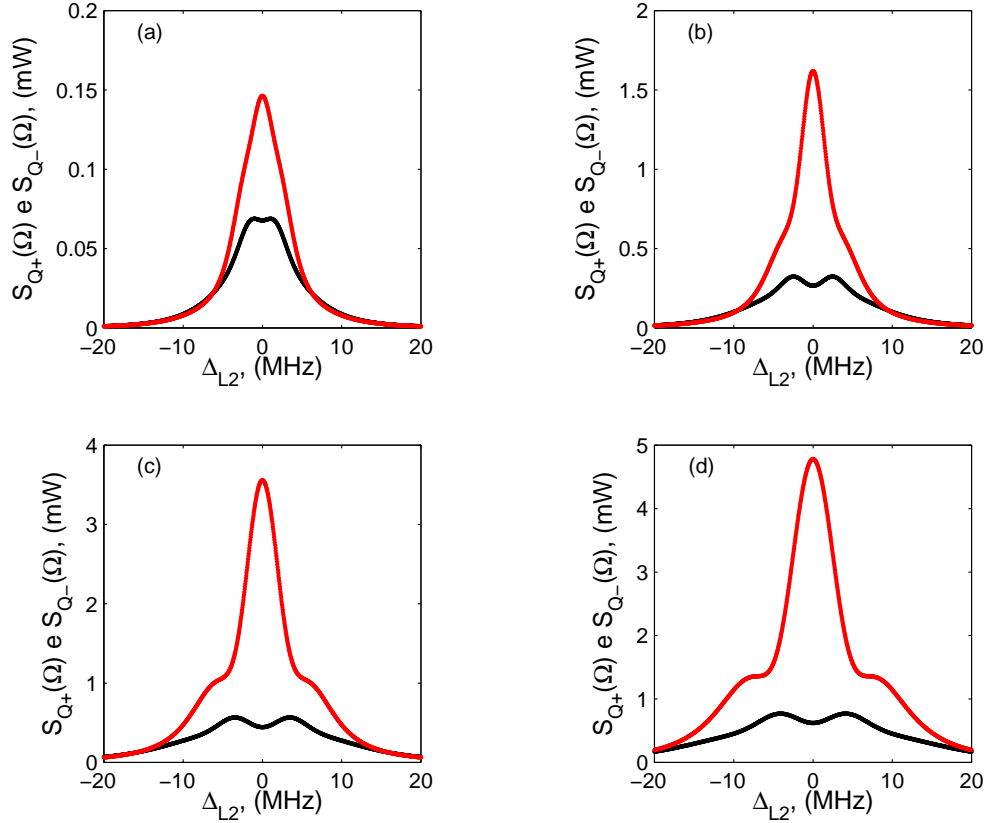


Figura 6.8: Sinais de ruído da soma  $S_{Q+}(\Omega)$  (curva preta) e da diferença  $S_{Q-}(\Omega)$  (curva vermelha) de fase dos campos de bombeio e sonda em função da dessintonia do campo sonda  $\Delta_{L2}$ . (a)  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,2 \times \Gamma$ ; (b)  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,4 \times \Gamma$ ; (c)  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,6 \times \Gamma$  e (d)  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0,8 \times \Gamma$ .

Como podemos ver na Fig.6.7, para essa frequência de análise, o sinal de ruído da soma  $S_{P+}(\Omega)$  de intensidade dos campos de bombeio e sonda apresenta o excesso de ruído na condição de transparência induzida  $\Delta_{L2} = 0$  e, à medida que a dessintonia do campo aumenta, o ruído diminui simetricamente em torno desse ponto. Já o sinal de ruído da diferença  $S_{P-}(\Omega)$  apresenta o excesso de ruído em posições simétricas em torno da condição de transparência, no entanto nessa condição, ainda existe um pequeno excesso de ruído. Além disso, vemos que, à medida que aumenta a intensidade dos campos incidentes, ambos sinais apresentam um alargamento por potência, mas a forma deles continua aproximadamente igual. Assim, podemos inferir que para esse valor da frequência de análise e para as intensidades dos campos incidentes consi-



deradas, os campos ficam correlacionados em intensidade para dessintonias do campo sonda da ordem da largura do sinal de ruído da soma, após o qual ficam anti-correlacionados até ficar não correlacionados para dessintonias do campo sonda grandes.

Para finalizar esta seção, nas Fig.6.8 e Fig.6.9 apresentamos as curva correspondentes às das Fig.6.7 e Fig.6.6, para a fase.

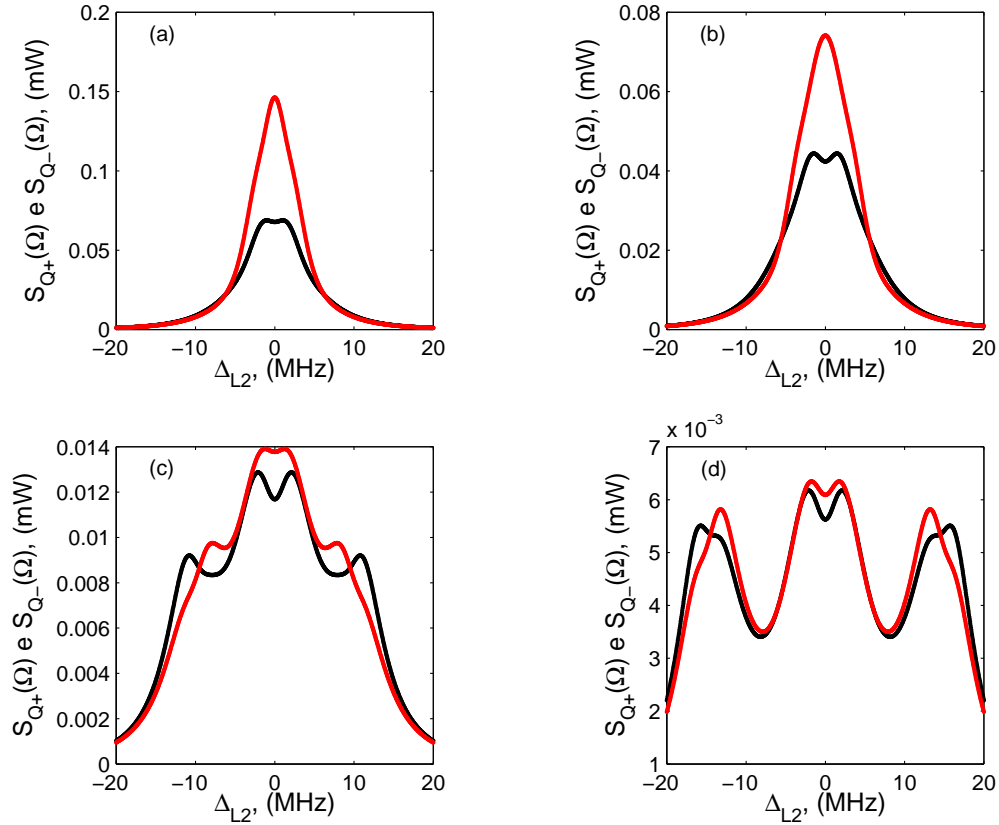


Figura 6.9: Sinais de ruído da soma  $S_{Q+}(\Omega)$  (curva preta) e do ruído da diferença  $S_{Q-}(\Omega)$  (curva vermelha) de fase dos campos de bombeio e sonda em função da dessintonia do campo sonda  $\Delta_{L2}$ . (a)  $\Omega = 2 \text{ MHz}$ ; (b)  $\Omega = 4 \text{ MHz}$ ; (c)  $\Omega = 10 \text{ MHz}$  e (d)  $\Omega = 15 \text{ MHz}$ .

Observando as curvas da Fig.6.8 vemos que, os campos de bombeio e sonda detetados, após interagir com os átomos e na condição de transparência induzida eletromagneticamente, apresentam uma anti-correlação de fase, para todas as frequências de Rabi consideradas e para todo o intervalo de varredura do campo sonda escolhido. Além disso, claramente vemos que o máximo dessa anti-correlação de fase entre os campos, acontece exatamente na perfeita sintonia do campo sonda. À diferença das curvas da Fig.6.7, neste caso o sinal de ruído da diferença (curva preta) de fase entre os feixes, conserva a sua estrutura com um pico centrado na ressonância da EIT.

Finalmente, das curvas da Fig.6.9, podemos ver que para todo o intervalo de varredura do campo sonda escolhido e, na condição de transparência induzida, os campos apresentam anti-correlação de fase na ressonância da EIT. Para essa frequência de Rabi considerada,  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0, 2 \times \Gamma$ , e para baixas frequências de análise, curvas (a), os campos apresentam só anti-correlação de fase. A medida que a frequência de análise vai aumentando, curvas (b) a (d), começam a aparecer estruturas laterais em pontos simétricos e em torno do pico central de ambos sinais, os quais vão se separando do mesmo a medida que a frequência de análise aumenta. Além da anti-correlação em  $\delta_{L2} = 0$ , para frequências de análise maiores, há regiões nas quais os feixes estão correlacionado, anti-correlacionados e não correlacionados intercaladas.

## 6.6 Comentários finais

Neste capítulo desenvolvemos um modelo estocástico para a transparência induzida eletromagneticamente, visando uma situação teórica mais próxima das investigações experimentais. Neste modelo os campos que interagem com os átomos são clássicos, com flutuações Markovianas nas suas fases, amplitudes constantes e com propagação livre. A interação desses campos com os átomos foi considerada semi-classicamente através das equações óticas e estocásticas de Bloch.

Além disso, apresentamos as previsões teóricas para os valores médios das variáveis atômicas no estado estacionário, bem como os de ruído de intensidade e de fase dos campos detetados e das correlações entre eles. De modo geral, podemos dizer que essas previsões teóricas estão em bom acordo qualitativo com os resultados experimentais apresentados no Cap.4: prevêm o excesso de ruído, na condição de transparência induzida, para o ruído tanto do feixe de bombeio, quanto do feixe sonda; prevêm a existência de correlação, no ruído de intensidade dos campos, para baixas intensidades e a anti-correlação para o caso de altas intensidades, sendo este caráter da correlação influenciado, também, pela frequência de análise. Além disso, vemos um conjunto de estruturas no modelo (como picos, estruturas tipo “M”, ou um “M” com um pico no centro), que também aparecem no experimento.

Estruturas tipo “M” são comumente reportadas em trabalhos relacionados à conversão de ruído de fase **PM** - para ruído de amplitude - **AM** [8, 9]. A explicação apresentada nesses trabalhos para a forma dessas estruturas está relacionada com analogias à técnica de Espectroscopia por Modulação de frequência (**FM**), em que um laser de banda estreita é modulado em frequência para produzir bandas laterais no espectro do laser simetricamente localizadas acima e abaixo da frequência central do espectro [74].

É importante destacar que as previsões teóricas dos espectros de ruído dos campos e as correlações entre eles, descritas neste capítulo, dependem

exclusivamente das fases estocásticas dos campos, pois se as anulamos, o ruído também se anula. Isto nos leva a inferir que, no processo de interação com os átomos, existe uma transferência de parte do excesso de ruído de fase dos campos para o ruído de intensidade dos mesmos, como apontado na Ref.[4]. Em outras palavras, na condição de transparência induzida, parte do excesso de ruído de fase dos campos é convertido em ruído de intensidade dos mesmos. Não podemos dizer o mesmo do ruído de intensidade, já que o modelo não leva em conta as flutuações de intensidade dos campos incidentes ao considerar estes com amplitudes constantes.

Do dito acima, vemos que um próximo passo na implementação deste modelo consiste em considerar as flutuações de amplitude dos campos e recalculas as previsões teóricas usando a linearização das flutuações dos campos em torno dos valores médios, tal como no caso do Cap.5.

No modelo desenvolvido neste capítulo, o modelo do ruído dos lasers é o mais simples, ou seja, o modelo de fase difusiva em que as flutuações da fase se comportam como um processo de Wiener, o que resulta num laser com forma de linha Lorentziana. Este é considerado um bom modelo para um laser, mas para o nosso caso, não parece ser bom o suficiente. Acontece que a largura dos sinais observados em processos de dois fótons depende fortemente da forma de linha dos lasers de excitação, e não apenas da largura de linha dos mesmos.

Dos modelos para o espectro dos lasers comumente empregados na literatura, o modelo de fase difusiva sempre gera os sinais mais alargados para a mesma largura de linha [75, 76, 77]. Isto está associado com o fato deste modelo implicar em uma forma de linha Lorentziana, cujas asas decaem lentamente.

Outros modelos mais realistas incluem o fato de que as asas do espectro do laser decaem mais rapidamente. Na verdade, a forma Lorentziana, é uma boa aproximação apenas para a região do espectro próxima ao pico [77]. Dado que os nossos sinais experimentais sondam regiões de frequências bem maiores que as larguras de linha dos lasers. Neste sentido, o fato das previsões teóricas estarem alargadas com relação aos sinais experimentais é perfeitamente compreensível. Disso, decorre a necessidade de utilizar modelos mais sofisticados para o ruído dos lasers, de modo a obter um bom acordo com as formas das linhas medidas experimentalmente [78, 79].

Além disso, devemos notar que, a falta de acordo entre as previsões teóricas deste modelo e os resultados experimentais para a correlação de fase entre os feixes detetados, na condição de transparência induzida, nos leva, por um lado, a revisarmos com maior detalhe as previsões e, por outro lado, a realizarmos um melhor controle das condições experimentais nas que essas medidas são realizadas. Neste sentido, uma estabilização mecânica e do sinal das cavidades de análise, tornam-se necessárias.

Por último, um cálculo mais fiel à experiência deve incluir a largura Doppler do nível excitado, bem como a estrutura hiperfina do mesmo. Cálculos recentes, levando em conta estas contribuições, mostram um melhor acordo

qualitativo com os resultados experimentais, mas ainda são necessários alguns testes.

# Capítulo 7

## Conclusões e comentários finais

Diferentemente da maioria das investigações sobre os fenômenos de aprisionamento coerente de população e de transparência induzida por laser, neste trabalho apresentamos um estudo teórico e experimental das propriedades estatísticas (ruído) dos campos eletromagnéticos de bombeio e sonda após a interação com os átomos na condição de transparência induzida eletromagneticamente. Neste sentido, apresentamos medidas experimentais e previsões teóricas tanto do ruído de intensidade e de fase dos campos, quanto das correlações entre eles.

Dentre os vários resultados experimentais que apresentamos - para essa condição de transparência induzida - citamos os seguintes:

- Medimos um excesso de ruído de intensidade em ambos campos. Este excesso de ruído se deve, por um lado, à coerência induzida pelos campos no meio atômico, caracterizado pelo equilíbrio dinâmico de troca de fótons entre os campos devido à interação com os átomos, sem afetar os valores médios das intensidades dos mesmos, mas alterando significativamente as suas propriedades estatísticas e, por outro lado, à transferência ressonante - pelos átomos - do excesso de ruído de fase dos campos para ruído de intensidade.
- Para intensidades dos campos iguais e da ordem da intensidade de saturação do meio atômico observamos uma clara correlação de ruído de intensidade entre os campos sendo que, para intensidades dos campos muito maiores do que a intensidade de saturação, mas ainda iguais, medimos uma clara anti-correlação do mesmo ruído. Além da dependência com a intensidade dos campos, esta correlação e anti-correlação de ruído de intensidade depende, também, da frequência de análise na qual são feitas as medidas, sendo que a correlação acontece preferencialmente em frequências de análise baixas e a anti-correlação, no caso contrário.
- Uma melhor caracterização do pico do sinal de ruído, feito através de uma varredura local em torno da sintonia do campo sonda, mostrou

claramente que esse sinal, apresenta estruturas internas complexas, com regiões intercaladas de correlação e anticorrelação.

- Finalmente, através da implementação das medidas do ruído de quadraturas dos campos usando cavidades de análise vazias, comprovamos a existência de um excesso de ruído de fase nos feixes utilizados. Além disso, realizamos as primeiras medidas (para nosso conhecimento) de correlação e anti-correlação de ruído da quadratura fase entre os campos. Neste sentido, os resultados mostram que para baixas intensidades, onde os feixes apresentam correlação de intensidade, também apresentam correlação de fase. Para altas intensidades, onde os feixes continuam apresentando correlação de intensidade, os campos apresentam anti-correlação. Devido a flutuações externas nos sianis consideramos pertinente e necessários alguns testes.

Feita as correções das falhas detetadas na implementação do primeiro modelo para explicar os resultados experimentais, obtemos previsões, de modo geral, diferentes da maioria dos resultados experimentais. Entre outras, este modelo prevê, na condição de ressonância da transparência induzida, um excesso de ruído na vizinhanças (simétrico em torno da perfeita sintonia de EIT) e o ruído correspondente ao de um estado coerente no centro da EIT, para ambos os campos; na ressonância da EIT os campos são não-correlacionados, com picos de correlação nas vizinhanças dessa ressonância, anti-correlacionados para dessintonias maiores à da largura de linha da EIT, para ficar novamente, não correlacionados para dessintonias maiores.

No entanto, esse modelo não foi descartado completamente, sendo necessários os testes experimentais. A chegada de material pedido para a construção de dois laser de Titânio:safira, que nos permitiria ter feixes em estado coerente, abriga as esperanças nesse sentido. Por outro lado, uma reativação da armadilha magneto-ótica, seria de grande ajuda, para desprezarmos o efeito Doppler. Esta última atividade está sendo projetada no curto prazo.

Por um lado, o pouco acordo entre o modelo citado acima e os resultados experimentais e, por outro lado, o surgimento de novos resultados experimentais, obtidos através de um maior controle dos parâmetros experimentais, o que se traduz em resultados mais confiáveis, nos levou a desenvolver um segundo modelo teórico que se ajusta mais à experiência.

Sem dúvida, as previsões teóricas obtidas com esse novo modelo são as que melhor se aproximam da maioria dos resultados experimentais. Entre outros: prevê o excesso de ruído, na condição de transparência induzida, para o ruído de ambos feixes detetados; prevê, para essa mesma condição, a existência de correlação de ruído de intensidade dos campos para baixas intensidades e, anti-correlação, para o caso de altas intensidades, mostrando que, além das intensidades, a correlação e anti-correlação são influenciadas pela frequência de análise.

Cientes de que as previsões desse modelo dependem exclusivamente das fases estocásticas dos campos, um próximo passo na implementação do mesmo consiste em considerar as flutuações de amplitude dos campos e recalcular as previsões teóricas. Um cálculo mais fiel à experiência deve incluir, também, a largura Doppler do nível excitado e a estrutura hiperfina do mesmo. Cálculos levando em conta estas contribuições, mostram um melhor acordo qualitativo com os resultados experimentais, mas ainda são necessários alguns testes.

Com relação à estrutura do pico do sinal de ruído, o novo modelo também prevê esse tipo de estruturas, estando em bom acordo qualitativo com a experiência. No entanto, torna-se necessário tratar os nossos campos com formas de linha diferentes à de uma Lorenziana, dado que essas estruturas são influenciadas não só pela largura da linha dos Lasers, mas também pela forma da linha.

Com relação à correlação de fase entre os campos, na condição de EIT, esse novo modelo prevê comportamentos diferentes. Isto nos mostra, por um lado, que devemos realizar essas medidas experimentais com um maior controle dos parâmetros envolvidos, principalmente no que diz respeito à estabilização mecânica das cavidades de análise e à estabilização em frequência das mesma e, por outro lado, à revisão cuidadosa dos cálculos teóricos.

Finalmente, acredito que neste trabalho respondemos satisfatoriamente às perguntas levantadas no decorrer do mesmo.





# Apêndice A

## Densidade espectral e teorema de Wiener–Khintchine

### A.1 Teorema de Wiener-Khintchine

Seguindo o tratamento de Mandel e Wolf [80], desejamos estudar o espectro de um processo aleatório estacionário  $z(t)$ . Com esse objetivo poderíamos representar  $z(t)$  como uma integral de Fourier,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega, \quad (\text{A.1})$$

e assumir que tal integral existe e tem inversa, ou seja:

$$\tilde{z}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{i\Omega t} dt, \quad (\text{A.2})$$

o que nos levaria a definir o espectro  $S(\Omega)$  de  $z(t)$ , como o valor esperado de  $|\tilde{z}(\Omega)|^2$ , ou seja:

$$S(\Omega) = \langle |\tilde{z}(\Omega)|^2 \rangle, \quad (\text{A.3})$$

de modo que  $S(\Omega)$  corresponderia a uma medida da força das flutuações associadas a uma componente particular de Fourier de  $z(t)$ .

No entanto,  $z(t)$  não se anula em  $t \rightarrow \infty$  de modo que a definição dada pela Eq.(A.1) não é matematicamente apropriada.

Este problema foi contornado por Wiener e Khintchine ao notarem que a função de auto-correlação:

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z^*(t) z(t + \tau) dt, \quad (\text{A.4})$$

é bem definida para uma grande classe de funções  $z(t)$ , se anulando quando  $\tau \rightarrow \infty$  para um processo com  $\langle z(t) \rangle = 0$ .

A função de auto-correlação pode então ser usada para definir uma *densidade espectral* (ou espectro de potência):

$$S(\Omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau . \quad (\text{A.5})$$

Notemos que para cada realização  $^{(k)}z(t)$  de um processo aleatório, a transformada de Fourier direta  $^{(k)}\tilde{z}(\Omega)$  é também um processo aleatório (na frequência). Escrevendo a média:

$$\langle \tilde{z}^*(\Omega) \tilde{z}(\Omega') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle z^*(t) z(t') \rangle e^{i(\Omega't' - \Omega t)} dt dt' . \quad (\text{A.6})$$

Dado que  $z(t)$  é um processo estacionário:

$$\langle z^*(t) z(t') \rangle = \Gamma(t' - t) , \quad (\text{A.7})$$

com  $\Gamma$  a função de auto-correlação de  $z(t)$ . Substituindo a Eq.(A.7) na integral da Eq.(A.6) e escrevendo  $t' - t = \tau$ , encontramos:

$$\langle \tilde{z}^*(\Omega) \tilde{z}(\Omega') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\Omega' - \Omega)t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{i\Omega'\tau} d\tau , \quad (\text{A.8})$$

a qual implica:

$$\langle \tilde{z}^*(\Omega) \tilde{z}(\Omega') \rangle = \tilde{\Gamma}(\Omega) \delta(\Omega - \Omega') , \quad (\text{A.9})$$

onde:

$$\tilde{\Gamma}(\Omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau . \quad (\text{A.10})$$

A Eq.(A.9) mostra que as componentes de Fourier (generalizadas) de um processo aleatório estacionário que pertencem a diferentes frequências são não correlacionadas. Por outro lado a Eq.(A.10) é uma medida da força das flutuações das componentes de Fourier à frequência  $\Omega$ , em outras palavras,  $\tilde{\Gamma}(\Omega)$  pode ser identificada com a densidade espectral  $S(\Omega)$  de  $z(t)$ :

$$S(\Omega) \equiv \tilde{\Gamma}(\Omega) . \quad (\text{A.11})$$

Fazendo uso da Eq.(A.11) as Eqs.(A.9) e (A.10) podem ser re-escritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\langle \tilde{z}^*(\Omega)\tilde{z}(\Omega') \rangle = S(\Omega)\delta(\Omega - \Omega') \quad (\text{A.12})$$

a qual define a densidade espectral ou espectro de potência  $S(\Omega)$  de um processo aleatório estacionário  $z(t)$ , com:

$$S(\Omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau)e^{i\Omega\tau} d\tau . \quad (\text{A.13})$$

A Eq.(A.13), junto a sua transformada inversa:

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega)e^{-i\Omega\tau} d\Omega , \quad (\text{A.14})$$

são geralmente conhecidas como o *teorema de Wiener-Khinchine*. Este teorema diz que a *função de auto-correlação de um processo aleatório estacionário e a densidade espectral (ou espectro de potências) do processo formam um par de transformadas de Fourier*

## A.2 Singularidades da densidade espectral

Quando  $z(t)$  representa um processo tal que  $\langle z \rangle \neq 0$ , a densidade espectral  $S(\Omega)$  pode conter singularidades. Suponhamos em primeiro lugar que  $z_0(t)$  representa um processo aleatório estacionário de média nula, que satisfaz a condição dada pela Eq.(A.12). Isto assegura que a função de auto-correlação  $\Gamma_0(\tau)$  de  $z_0(t)$  é absolutamente integrável, e que a sua transformada inversa  $S_0(\Omega)$  existe e é uma função contínua em  $\Omega$ .

Se  $z(t)$  é um processo aleatório que difere do processo  $z_0(t)$  só por uma constante, i.e.,  $z(t) = \langle z \rangle + z_0(t)$ , podemos escrever a função de auto-correlação  $\Gamma(\tau)$  de  $z(t)$  como:

$$\Gamma(\tau) = \Gamma_0(\tau) + |\langle z \rangle|^2 . \quad (\text{A.15})$$

Calculando a transformada de Fourier a ambos lados da igualdade dada pela Eq.(A.15) e usando a Eq.(A.13), obtemos a seguinte expressão para a densidade espectral  $S(\Omega)$  de  $z(t)$ :

$$S(\Omega) = S_0(\Omega) + |\langle z \rangle|^2 \delta(\Omega) , \quad (\text{A.16})$$

com  $\delta(\Omega)$  a função delta de Dirac. Pelo fato de  $\langle z \rangle \neq 0$ , a densidade espectral contém singularidade na frequência zero.

### A.3 Correlações cruzadas e densidades espectrais cruzadas

As funções de correlação cruzadas de dois processos aleatórios reais  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  para dois tempos diferentes  $t_1$  e  $t_2$  são definidas pelo produto  $\langle x_1(t_1)x_2(t_2) \rangle$ . Se os processos são complexos  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$ , define-se a função de correlação cruzada através da seguinte expressão:

$$\Gamma_{12}(t, t + \tau) \equiv \langle z_1^*(t)z_2(t + \tau) \rangle . \quad (\text{A.17})$$

Se além do anterior, os processos são conjuntamente estacionários,  $\Gamma_{12}(t, t + \tau)$  é função só de  $\tau$ , podemos denotar ele por  $\Gamma_{12}(\tau)$ , obedecendo a condição  $\Gamma_{21}(\tau) = \Gamma_{12}^*(-\tau)$ .

Do anterior temos que para um conjunto de  $N$  processos aleatórios conjuntamente estacionários:

$$\Gamma_{ij}(\tau) \equiv \langle z_i^*(t)z_j(t + \tau) \rangle , \quad (i, j = 1, 2, 3 \dots N) , \quad (\text{A.18})$$

corresponde a uma matriz  $N \times N$  conhecida como a *matriz de correlação cruzada*. Se  $\langle z_i(t) \rangle$ , para todo  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  são zero,  $\Gamma_{ij}(\tau)$  é chamada de *matriz de covariância* dos processos aleatórios.

Através de argumentos similares aos usados na derivação da Eq.(A.14), pode-se mostrar:

$$\Gamma_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ij}(\Omega)e^{-i\Omega\tau} d\Omega , \quad (\text{A.19})$$

i.e., a *função de correlação cruzada* de  $z_i(t)$  e  $z_j(t)$  é a transformada de Fourier inversa da *função de densidade espectral cruzada*:

$$S_{ij}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{ij}(\tau)e^{i\Omega\tau} d\tau , \quad (\text{A.20})$$

e ambas devem ser lembradas como o *teorema de Wiener-Khinchine generalizado*.

# Apêndice B

## Cálculo de Itô

### B.1 Exemplo de equação diferencial estocástica

Seguindo o tratamento apresentado por Gardiner [81], vamos escrever a seguinte equação diferencial estocástica:

$$\frac{d}{dt}I(t) = -\alpha I(t) + q\mu(t) , \quad (\text{B.1})$$

onde  $I(t)$  representa a corrente elétrica devido aos elétrons que chegam a um detector, por exemplo. Esta equação é equivalente à equação de Langevin, e neste caso a força das flutuações é dada pelo termo  $q\mu(t)$ , onde  $\mu(t)$  é a derivada de um processo Poissoniano, com média distinta de zero, ou seja:

$$\langle \mu(t)dt \rangle = \langle dN(t) \rangle = \lambda dt , \quad (\text{B.2})$$

$$\langle [dN(t) - \lambda dt]^2 \rangle = \lambda dt . \quad (\text{B.3})$$

Das propriedades de uma distribuição Poissoniana, em que a variância é igual a média, definindo as flutuações como a diferença entre o valor médio e  $dN(t)$ , temos:

$$d\eta(t) = dN(t) - \lambda dt , \quad (\text{B.4})$$

de onde vemos que a Eq.(B.1) adota a forma:

$$dI(t) = [\lambda q - \alpha I(t)]dt + qd\eta(t) . \quad (\text{B.5})$$

O objetivo é resolver a equação anterior para obtermos o valor médio no estado estacionário  $\langle I(\infty) \rangle$  e da sua variância  $\langle I^2(\infty) \rangle - \langle I(\infty) \rangle^2$ . Usando

cálculo diferencial ordinário e, assumindo que  $\langle I(t)d\eta(t) \rangle = 0$ , derivamos as seguintes expressões:

$$\frac{d}{dt}\langle I(t) \rangle = \lambda q - \alpha \langle I(t) \rangle, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle I^2(t) \rangle = \lambda q \langle I(t) \rangle - \alpha \langle I^2(t) \rangle, \quad (\text{B.7})$$

das quais obtemos, para  $t \rightarrow \infty$ , o seguinte:

$$\langle I(\infty) \rangle = \frac{\lambda q}{\alpha}, \quad (\text{B.8})$$

$$\langle I^2(\infty) \rangle = \left( \frac{\lambda q}{\alpha} \right)^2. \quad (\text{B.9})$$

A solução da Eq.(B.8) é completamente razoável e corresponde à corrente média gerada no detector. Por outro lado, a Eq.(B.9), indica que a corrente quadrática média é igual ao quadrado da média ou seja, para  $t \rightarrow \infty$ , não há flutuações na corrente gerada no detector.

Dado que nas derivações anteriores usamos cálculo ordinário, escrevemos:

$$d[I^2(t)] = [I(t) + dI(t)]^2 - I^2(t) = 2I(t)dI(t) + [dI(t)]^2, \quad (\text{B.10})$$

e não consideramos o termo  $[dI(t)]^2$  por ser de segunda ordem em  $dI(t)$ . No entanto, olhando as Eqs.(B.3) e (B.4), vemos que  $\langle d\eta(t)^2 \rangle = \lambda dt$  ou seja, uma *quantidade de segunda ordem em  $d\eta$*  corresponde a uma de quantidade de primeira ordem em  $dt$ . Para vermos o sentido disto, calculando  $\langle I^2(t) \rangle$  com base nas considerações anteriores e usando as Eqs.(B.5) e (B.10), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle dI^2(t) \rangle &= 2\langle I(t) \{ [\lambda q - \alpha I(t)] dt + q d\eta(t) \} \rangle + \\ &+ \langle \{ [\lambda q - \alpha I(t)] dt + q d\eta(t) \}^2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Assumindo, novamente, que  $\langle I(t)d\eta(t) \rangle = 0$  e expandindo até primeira ordem em  $dt$ , obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle I^2(t) \rangle = \left[ \lambda q \langle I(t) \rangle - \alpha \langle I^2(t) \rangle + \frac{q^2 \lambda}{2} \right] dt, \quad (\text{B.12})$$

da qual encontramos:

$$\langle I^2(\infty) \rangle - \langle I(\infty) \rangle^2 = \frac{q^2 \lambda}{2\alpha}, \quad (\text{B.13})$$

ou seja, aparecem as flutuações.

Dos resultados anteriores podemos concluir que funções estocásticas normalmente não podem ser derivadas segundo as leis usuais do cálculo. É necessário desenvolver regras especiais, e uma especificação precisa do que se entende por diferenciação torna-se importante.

## B.2 Alguns conceitos básicos

### B.2.1 Processo estocástico

Quando falamos de **processos estocásticos** estamos nos referindo a sistemas que evoluem probabilisticamente no tempo, mais precisamente, sistemas nos quais existe uma certa variável aleatória dependente do tempo, por exemplo,  $X(t)$ . Podemos medir os valores  $x_1, x_2, x_3, \dots$  de  $X(t)$  nos instantes  $t_1, t_2, t_3, \dots$  e assumir que existe um conjunto de *densidades de probabilidades conjuntas*  $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3 \dots)$  (a probabilidade de medir  $x_1$  em  $t_1$ , após medir  $x_2$  em  $t_2$ , etc...) que descrevem o sistema completamente.

A partir desse conjunto de densidades de probabilidades conjuntas, definem-se *densidades de probabilidade condicionais*:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots) \equiv p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots) / p(y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots), \quad (\text{B.14})$$

ou seja, a probabilidade de medir  $x_1$  em  $t_1$ , após medir  $x_2$  em  $t_2$ , etc... dado que foi medido  $y_1$  em  $\tau_1$ , após ter medido  $y_2$  em  $\tau_2$ , etc... e cuja definição não depende da ordem temporal.

Quando se conhecem todas as possíveis probabilidades conjuntas do tipo dado pela Eq.(B.14) que definem um sistema, se diz que é um *processo estocástico separável*.

### B.2.2 Processo de Markov

Baseado na definição de probabilidade condicional, se o tempo for tomado no sentido  $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots$ , a probabilidade condicional é determinada inteiramente pelo conhecimento mais recente, ou seja neste tipo de processo, só o conhecimento do presente determina o futuro:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots) \equiv p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1). \quad (\text{B.15})$$

O anterior é a definição de um processo de Markov, onde tudo pode ser definido em termos das probabilidades condicionais simples  $p(x_1, t_1 | y_1, \tau_1)$ , isto é, o estado do sistema só depende de sua condição imediatamente anterior. Disso, podemos escrever:

$$p(x_1, t_1, x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1; \dots) \equiv p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | y_1, \tau_1). \quad (\text{B.16})$$

### B.2.3 Processo de Wiener

Seguindo com este tratamento simplificado, temos que um **Processo de Wiener** ou movimento Browniano, ou processo de difusão, é o exemplo mais simples de um processo de Markov, que depende de uma única variável  $W(t)$  cuja densidade de probabilidade condicional obedece a uma equação de Focker-Planck do tipo:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(w, t|w_0, t_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} p(w, t|w_0, t_0) . \quad (\text{B.17})$$

Supondo a condição inicial:

$$p(w, t_0|w_0, t_0) = \delta(w - w_0) , \quad (\text{B.18})$$

sobre a probabilidade condicional, resolvemos a Eq.(B.17) usando funções características, obtendo:

$$p(w, t|w_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} e^{-\frac{(w-w_0)^2}{2(t-t_0)}} , \quad (\text{B.19})$$

a qual representa uma Gaussiana, com:

$$\langle W(t) \rangle = w_0 , \quad (\text{B.20})$$

$$\langle [W(t) - w_0]^2 \rangle = t - t_0 , \quad (\text{B.21})$$

de modo tal que uma distribuição inicialmente fina alarga com o tempo.

### B.2.4 A integral estocástica

Seja  $G(t)$  uma função arbitrária do tempo e  $W(t)$  o processo de Wiener. Como definir a integral?:

$$\int_{t_0}^t G(t') dW(t') \equiv ? . \quad (\text{B.22})$$

Normalmente, divide-se o intervalo  $[t_0, t]$  em  $n$  sub-intervalos tais que:

$$t_0 \leq t_1 \dots \leq t_{n-1} \leq t , \quad (\text{B.23})$$

e definem-se pontos intermédios  $\tau_i$  tais que  $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$ .



Disso, define-se a seguinte integral:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t G(t')dW(t') &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n G(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})] . \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

A definição anterior parece razoável, mas há um problema. Imaginemos que a função  $G(t)$  é o processo de Wiener  $W(t)$  então, seguindo a definição acima, achamos que:

$$\begin{aligned} \langle S_n \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n W(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n [\min(\tau_i, t_i) - \min(\tau_i, t_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1}) . \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Ao contrário de uma integração normal, a escolha dos  $\tau_i$  pode fazer diferença neste caso. Por exemplo se escolhermos  $\tau_i = \alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1}$ , achamos:

$$\langle S_n \rangle = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})\alpha = \alpha(t - t_0) . \quad (\text{B.26})$$

É fácil ver que a integral pode ter qualquer valor entre 0 e  $t - t_0$ . Existem duas definições diferentes da integração estocástica: o cálculo de Itô e o cálculo de Stratonovich.

### O cálculo de Itô

O cálculo de Itô parte da condição  $\alpha = 0$ , do qual define-se a seguinte integração:

$$\int_{t_0}^t G(t')dW(t') \equiv \text{ms} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n G(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\} , \quad (\text{B.27})$$

onde  $\text{ms} - \lim$  denota o *limite quadrático médio*, com a seguinte definição: consideremos  $X_n(\omega)$ .  $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$  na média quadrática se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \rho(\omega)[X_n(\omega) - X(\omega)]^2 d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle [X_n(\omega) - X(\omega)]^2 \rangle = 0 , \quad (\text{B.28})$$

assim escrevemos  $\text{ms} - \lim X_n = X$ .

### Função não-antecipante

Uma função  $G(t)$  é chamada de não-antecipante no tempo, se para todo  $t$  e  $s$ , com  $t < s$ , a função  $G(t)$  é estatisticamente independente de  $W(s) - W(t)$ . Isto significa que a função  $G(t)$  é independente do comportamento do processo de Wiener no futuro de  $t$ . Alguns exemplos são:

1.  $W(t)$
2.  $\int_{t_0}^t F[W(t')]dt'$
3.  $\int_{t_0}^t F[W(t')]dW(t')$  e, para  $G(t)$  não-antecipante,
4.  $\int_{t_0}^t G(t')dt'$
5.  $\int_{t_0}^t G(t')dW(t')$

As funções anteriores são não-antecipantes porque a integral de Itô envolve só  $G(t')$  com  $t' < t$  e  $W(t')$  com  $t' \leq t$ . O importante aqui é que estas funções são causais e não podem ser definidas equações diferenciais estocásticas sem causalidade.

São propriedades deste tipo de funções:  $dW(t)^2 = dt$  e  $dW(t)^{N+2} = 0$ .

Por outro lado temos que para uma função  $G(t)$  não-antecipante:

$$\left\langle \int_{t_0}^t G(t')dW(t') \right\rangle \equiv 0, \quad (\text{B.29})$$

que resulta de uma consequência direta da definição de integral de Itô<sup>1</sup>.

### Regra geral de diferenciação

Dentre outras propriedades da integral estocástica de Itô, temos que *ao formar diferenciais, devemos manter todos os termos até segunda ordem em  $dW(t)$* . A modo de exemplo:

$$\begin{aligned} d[e^{W(t)}] &= e^{W(t)-dW(t)} - e^{W(t)} \\ &= e^{W(t)}[dW(t) + \frac{1}{2}dW(t)^2] = e^{W(t)}[dW(t) + \frac{1}{2}dt]. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

A regra geral é a seguinte:

$$d f[W(t), t] = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial W} dW(t). \quad (\text{B.31})$$

---

<sup>1</sup>Este resultado não é verdadeiro para a integral de Stratonovich.

# Apêndice C

## Relações entre os campos para uma cavidade vazia

Neste apêndice apresentaremos o desenvolvimento das equações que representam a dinâmica dos operadores de amplitude do campo intracavidade e de saída utilizando o formalismo *input-output* [82, 83, 14] para uma cavidade em anel e de grande finesse. A cavidade tem só um espelho de acoplamento, i.e. uma relação entrada-saída.

Os principais resultados serão usados tanto na descrição do modelo que permite obter o ruído de quadratura de um campo através da rotação da elipse das flutuações em torno do valor médio do campo (Sec.2.5.2), quanto no desenvolvimento do modelo teórico quântico para o estudo da transparência induzida por laser do Cap.5.

### C.1 Dinâmica dos campos intracavidade e de saída na cavidade vazia

O modelo da cavidade usado para o desenvolvimento das relações entre os operadores de amplitude do campo incidente  $\hat{A}^{in}(t)$ , intracavidade  $\hat{A}(t)$  e de saída  $\hat{A}^s(t)$  é apresentado na Fig.C.1. Este modelo, conhecido na literatura como *modelo input-output* é amplamente utilizado no estudo da dinâmica desses campos. Nesse modelo o acoplamento entre os respectivos campos é realizado pelo espelho  $M_1$  de coeficientes de amplitude de reflexão  $r \equiv \sqrt{\mathcal{R}}$  e de transmissão  $t \equiv \sqrt{\mathcal{T}}$ .

Para uma cavidade com  $M_1$  sem perdas e de coeficiente de transmissão  $\mathcal{T} \ll 1$ , podemos escrever:

$$\sqrt{\mathcal{R}} = \sqrt{1 - \mathcal{T}} = (1 - \mathcal{T})^{1/2} \approx 1 - \frac{\mathcal{T}}{2}. \quad (\text{C.1})$$

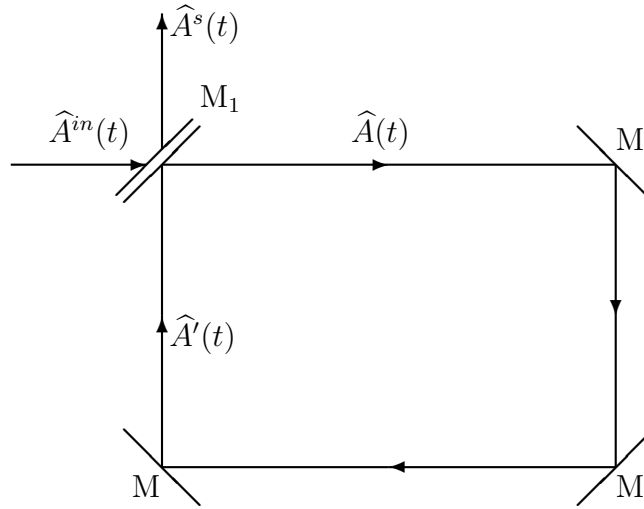


Figura C.1: Cavity em anel para o estudo da dinâmica dos campos intracavidade.  $M_1$ : espelho de acoplamento de coeficientes de reflexão e de transmissão  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{T}_1$ , respectivamente;  $M$ ; espelhos de 100% de refletividade.

Por conservação da energia, em  $M_1$ , se cumprem as seguintes relações entre os operadores de amplitudes dos campos (uma relação similar pode ser obtida para os operadores de criação):

$$\widehat{A}(t) = \sqrt{\mathcal{T}} \widehat{A}^{in}(t) + \sqrt{\mathcal{R}} \widehat{A}'(t) \quad (C.2)$$

e

$$\widehat{A}^s(t) = \sqrt{\mathcal{T}} \widehat{A}'(t) - \sqrt{\mathcal{R}} \widehat{A}^{in}(t) , \quad (C.3)$$

respectivamente.

A Eq.(C.2) mostra que no instante  $t$  a amplitude do campo intracavidade  $\widehat{A}(t)$  depende da amplitude do campo incidente no mesmo instante de tempo e da amplitude do campo intracavidade que percorreu uma vez a cavidade  $\widehat{A}'(t)$ . Por outro lado, a Eq.(C.3) mostra que para o mesmo instante de tempo  $t$ , a amplitude do campo de saída  $\widehat{A}^s(t)$  é a superposição entre a amplitude do campo incidente que é refletido pelo espelho de acoplamento e a amplitude do campo intracavidade que percorreu uma vez a cavidade (transmitido pelo espelho de acoplamento).

Seja  $\tau$  o tempo que o fóton leva para percorrer uma vez a cavidade de comprimento total  $\mathcal{L}$ , ou seja:

$$\tau = \frac{\mathcal{L}}{c} , \quad (C.4)$$

com  $c$  a velocidade da luz no vácuo.

O operador de campo elétrico  $\widehat{\vec{E}}'(t)$  que percorreu uma vez a cavidade, pode ser escrito como:

$$\widehat{E}'(t) = \widehat{E}(t + \tau)$$

$$\mathcal{E}_{0L} \left\{ e^{-i\omega_L t} \widehat{A}'(t) + e^{i\omega_L t} \widehat{A}'^\dagger(t) \right\} = \mathcal{E}_{0L} \left\{ e^{-i\omega_L(t+\tau)} \widehat{A}(t + \tau) + e^{i\omega_L(t+\tau)} \widehat{A}^\dagger(t + \tau) \right\},$$

(C.5)

de modo tal que se cumprem as seguintes relações entre os operadores de amplitude dos campos intracavidade:

$$\widehat{A}'(t) = e^{-i\omega_L \tau} \widehat{A}(t + \tau),$$

(C.6)

onde  $\omega_L \tau$  é a defassagem do campo devido ao comprimento da cavidade, com  $\omega_L$  a frequência central de oscilação do campo (frequência do laser).

Os modos permitidos na cavidade tem uma frequência definida pela relação  $\omega_c = 2m\pi$ , com  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , assim vemos que perto da ressonância podemos escrever, sem perda de generalização,  $-\omega_L \tau \rightarrow -\Delta_c \tau$ , com  $\Delta_c = (\omega_L - \omega_c)$  a dessintonia entre a frequência do modo da cavidade e a frequência de oscilação do campo. Do anterior, podemos escrever:

$$\widehat{A}'(t) = e^{-i\Delta_c \tau} \widehat{A}(t + \tau).$$

(C.7)

Perto da ressonância  $\Delta_c \tau \ll 1$ , de modo tal que  $e^{-i\Delta_c \tau} \approx 1 - i\Delta_c \tau$ .

Após substituir as expressões dadas pela Eqs.(C.1) e (C.7) na Eq.(C.2) encontramos:

$$\widehat{A}(t) = \sqrt{\mathcal{F}} \widehat{A}^{in}(t) + \widehat{A}(t + \tau) - \left( \frac{\mathcal{F}}{2} + i\Delta_c \tau \right) \widehat{A}(t + \tau),$$

onde usamos a aproximação  $e^{-i\Delta_c \tau} \approx 1 - i\Delta_c \tau$  (perto da ressonância  $\Delta_c \tau \ll 1$ ) e consideramos só termos de primeira ordem em  $\tau$ . A expressão anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\widehat{A}(t) - \widehat{A}(t + \tau)}{\tau} = -\left( \frac{\gamma}{2} + i\Delta_c \right) \widehat{A}(t + \tau) + \sqrt{\frac{\gamma}{\tau}} \widehat{A}^{in}(t),$$

onde introduzimos a taxa de amortecimento (largura de linha) do campo intracavidade:

$$\gamma = \frac{\mathcal{F}}{\tau}.$$

(C.8)

Considerando as variações de  $\widehat{A}(t)$  pequenas no tempo  $\tau$  (tempo que o fóton leva para dar uma volta na cavidade), encontramos a seguinte expressão para a dinâmica do operador de amplitude do campo intracavidade  $\widehat{A}(t)$ , para uma cavidade vazia:

$$\frac{d}{dt}\widehat{A}(t) = -\left(\frac{\gamma}{2} + i\Delta_c\right)\widehat{A}(t) + \sqrt{\frac{\gamma}{\tau}}\widehat{A}^{in}(t). \quad (\text{C.9})$$

Finalmente, fazendo uma análise similar para o operador de amplitude do campo de sída  $\widehat{A}^s(t)$ , a Eq.(C.3) se transforma na seguinte expressão:

$$\widehat{A}^s(t) = \sqrt{\mathcal{F}}\widehat{A}(t) - \widehat{A}^{in}(t), \quad (\text{C.10})$$

onde consideramos, novamente, só termos de primeira ordem e  $\tau$ .

### C.1.1 Relação de comutação do campo intracavidade

Para realizar o cálculo da relação de comutação entre os operadores de amplitude do campo intracavidade, no caso de uma cavidade vazia, vamos fazer uso do método de linearização dos operadores em torno do valor médio<sup>1</sup>. Nesse caso obtemos a seguinte relação de comutação entre os operadores de amplitude do campo intracavidade:

$$[\widehat{A}(t), \widehat{A}^\dagger(t')] = [\alpha(t) + \delta\widehat{A}(t), \alpha(t') + \delta\widehat{A}(t')] = [\delta\widehat{A}(t), \delta\widehat{A}(t')], \quad (\text{C.11})$$

a que será de grande utilidade quando consideremos o acoplamento entre osátomos e os campos intracavidade.

Para desenvolver a relação de comutação dada pela Eq.(C.11), vamos escrever os correspondentes operadores de flutuação e no espaço de frequências:

$$\delta\widehat{A}(\Omega) = \sqrt{\frac{\gamma}{\tau}} \left\{ \frac{1}{\left[\frac{\gamma}{2} - i(\Omega - \Delta_c)\right]} \right\} \delta\widehat{A}^{in}(\Omega), \quad (\text{C.12})$$

$$\delta\widehat{A}^\dagger(\Omega) = \sqrt{\frac{\gamma}{\tau}} \left\{ \frac{1}{\left[\frac{\gamma}{2} - i(\Omega + \Delta_c)\right]} \right\} \delta\widehat{A}^{in\dagger}(\Omega). \quad (\text{C.13})$$

---

<sup>1</sup>No estudo das flutuações quânticas acostuma-se escrever um operador genérico  $\widehat{O}(t)$  como:

$$\widehat{O}(t) = \langle \widehat{O}(t) \rangle + \delta\widehat{O}(t)$$

onde o  $\langle \widehat{O}(t) \rangle$  corresponde ao valor médio do operador no estado considerado e  $\delta\widehat{O}(t)$  corresponde a sua flutuação.

A partir das relações anteriores vemos que a relação de comutação dada pela Eq.(C.11), no espaço de frequências, é dada por:

$$\left[ \delta \widehat{A}(\Omega), \delta \widehat{A}^\dagger(\Omega') \right] = \frac{\gamma}{\tau} \left\{ \frac{\left[ \delta \widehat{A}^{in}(\Omega), \delta \widehat{A}^{in\dagger}(\Omega') \right]}{\left[ \frac{\gamma}{2} - i(\Omega - \Delta_c) \right] \left[ \frac{\gamma}{2} - i(\Omega' + \Delta_c) \right]} \right\} .$$

Fazendo  $\Omega' = -\Omega$  e lembrando que o campo incidente é um campo livre ou seja, cumpre-se:

$$\left[ \delta \widehat{A}^{in}(\Omega), \delta \widehat{A}^{in\dagger}(\Omega') \right] = 2\pi \delta(\Omega + \Omega') ,$$

encontramos:

$$\left[ \delta \widehat{A}(\Omega), \delta \widehat{A}^\dagger(\Omega') \right] = \frac{\gamma}{\tau} \left\{ \frac{2\pi \delta(\Omega + \Omega')}{\left[ \frac{\gamma^2}{4} + (\Omega - \Delta_c)^2 \right]} \right\} . \quad (C.14)$$

Por outro lado, usando a transformada inversa de Fourier das Eqs.(C.12) e (C.13), encontramos:

$$\delta \widehat{A}(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\tau}} \int d\Omega \left\{ \frac{e^{-i\Omega t} \delta \widehat{A}^{in}(\Omega)}{\left[ \frac{\gamma}{2} - i(\Omega - \Delta_c) \right]} \right\} , \quad (C.15)$$

$$\delta \widehat{A}^\dagger(t') = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\tau}} \int d\Omega' \left\{ \frac{e^{-i\Omega' t'} \delta \widehat{A}^{in\dagger}(\Omega')}{\left[ \frac{\gamma}{2} - i(\Omega' + \Delta_c) \right]} \right\} . \quad (C.16)$$

Fazendo o comutador entre as expressões anteriores, chegamos a:

$$\begin{aligned} \left[ \delta \widehat{A}(t), \delta \widehat{A}^\dagger(t') \right] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\gamma}{\tau} \times \\ &\times \int d\Omega \int d\Omega' \left\{ \frac{e^{-i\Omega t} e^{-i\Omega' t'}}{\left[ \frac{\gamma}{2} - i(\Omega - \Delta_c) \right] \left[ \frac{\gamma}{2} - i(\Omega' + \Delta_c) \right]} \right\} \times \\ &\times \left[ \delta \widehat{A}^{in}(\Omega), \delta \widehat{A}^{in\dagger}(\Omega') \right] . \end{aligned}$$

Levando em conta, novamente, as propriedades do campo incidente, encontramos:

$$\left[ \delta \widehat{A}(t), \delta \widehat{A}^\dagger(t') \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{\tau} \int d\Omega \left\{ \frac{e^{-i\Omega(t-t')}}{\left[ \frac{\gamma^2}{4} + (\Omega - \Delta_c)^2 \right]} \right\} , \quad (C.17)$$

de onde vemos que o comutador em consideração é determinado pela transformada de Fourier de uma Lorentziana.

Resolvendo a integral da Eq.(C.17), obtemos a seguinte relação de comutação em dois tempos para os operadores de amplitude do campo intracavidade, na cavidade vazia:

$$\left[ \widehat{A}(t), \widehat{A}^\dagger(t') \right] = \left[ \delta \widehat{A}(t), \delta \widehat{A}^\dagger(t') \right] = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}|t-t'|}}{\tau}, \quad (\text{C.18})$$

a qual, no caso particular  $t = t'$ , toma o valor  $1/\tau$ , diferente do valor do mesmo comutador para campo livre que vale simplesmente 1.

## C.2 Flutuações do campo intracavidade

Da linearização dos operadores encontramos a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = - \left( \frac{\gamma}{2} + i\Delta_c \right) \alpha(t) + \sqrt{\frac{\gamma}{\tau}} \alpha^{in}(t), \quad (\text{C.19})$$

para a evolução temporal do valor médio do operador de amplitude do campo intracavidade e:

$$\frac{d}{dt} \delta \widehat{A}(t) = - \left( \frac{\gamma}{2} + i\Delta_c \right) \delta \widehat{A}(t) + \sqrt{\frac{\gamma}{\tau}} \delta \widehat{A}^{in}(t), \quad (\text{C.20})$$

para a evolução temporal dos operadores de flutuações das amplitudes do campo intracavidade.

Lembrando que no espaço de frequências a Eq.(C.20) é dada pela Eq.(C.12) e das definições da matriz de covariância, Sec.2.4.3 Eq.(2.96), pode-se mostrar que a matriz de covariância do campo intracavidade é proporcional à matriz de covariância do campo incidente, ou seja:

$$\mathbf{C}(\Omega) \propto \mathbf{C}^{in}(\Omega). \quad (\text{C.21})$$

### Ruído do campo intracavidade

Partindo das definições do operador de campo elétrico, do operador de quadratura generalizado- no espaço de frequências- e do fato da matriz de covariância do campo intracavidade ser proporcional à matriz de covariância do campo



---

incidente, podemos ver que, por exemplo, para um campo incidente no estado de vácuo, ou num estado coerente, ambas quadraturas do campo intracavidade têm o mesmo espectro de ruído, dado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{S}(\Omega)_{|0\rangle} = \frac{\gamma}{\tau} \left\{ \frac{1}{\frac{\gamma^2}{4} + (\Omega - \Delta_c)^2} \right\}, \quad (\text{C.22})$$

ou seja, uma Lorentziana centrada em  $\Delta_c$ . Contrário ao espectro de ruído do campo livre que apresenta um espectro de ruído branco, o campo intracavidade tem um espectro de ruído que depende da frequência de análise  $\Omega$ .



# Apêndice D

## Forças atômicas de Langevin

Os coeficientes de difusão das variáveis atômicas, ou correlações entre as forças atômicas de Langevin, são obtidas a partir das *Relações Generalizadas de Einstein* [68, 70]. Seja um sistema descrito por  $\mathcal{N}$  operadores, os quais escreveremos simplesmente como  $\hat{O}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots \mathcal{N}$  que satisfazem as equações quânticas de Langevin:

$$\frac{d}{dt}\hat{O}_i(t) = \mathcal{D}_i[\hat{O}_1(t), \dots, \hat{O}_{\mathcal{N}}(t)] + \mathcal{F}_i(t) , \quad (\text{D.1})$$

onde as forças  $\mathcal{F}_i(t)$  satisfazem a seguinte condição:

$$\langle \mathcal{F}_i(t) \rangle = 0 . \quad (\text{D.2})$$

Considerando o operador  $\hat{O}_j(t)$ , do conjunto de operadores, podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}\hat{O}_j(t) = \mathcal{D}_j[\hat{O}_1(t), \dots, \hat{O}_{\mathcal{N}}(t)] + \mathcal{F}_j(t) . \quad (\text{D.3})$$

Multiplicando a Eq.(D.3) por  $\hat{O}_i^\dagger(t)$  pelo lado esquerdo, encontramos:

$$\hat{O}_i^\dagger(t) \left( \frac{d}{dt}\hat{O}_j(t) \right) = \hat{O}_i^\dagger(t)\mathcal{D}_j(t) + \hat{O}_i^\dagger(t)\mathcal{F}_j(t) . \quad (\text{D.4})$$

Da mesma forma, multiplicando o Hermitiano adjunto da Eq.(D.1) por  $\hat{O}_j(t)$  pela direita, temos:

$$\left( \frac{d}{dt}\hat{O}_i^\dagger(t) \right) \hat{O}_j(t) = \mathcal{D}_i^\dagger(t)\hat{O}_j(t) + \mathcal{F}_i^\dagger(t)\hat{O}_j(t) . \quad (\text{D.5})$$

Somando as Eqs.(D.4) e (D.5), encontramos:

$$\frac{d}{dt} \left( \widehat{O}_i^\dagger(t) \widehat{O}_j(t) \right) = \mathcal{D}_i^\dagger(t) \widehat{O}_j(t) + \widehat{O}_i^\dagger(t) \mathcal{D}_j(t) + \mathcal{F}_i^\dagger(t) \widehat{O}_j(t) + \widehat{O}_i^\dagger(t) \mathcal{F}_j(t) , \quad (\text{D.6})$$

onde usamos a propriedade da derivação.

Calculando o valor médio da expressão anterior e reordenando os termos, achamos:

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left( \widehat{O}_i^\dagger(t) \widehat{O}_j(t) \right) - \mathcal{D}_i^\dagger(t) \widehat{O}_j(t) - \widehat{O}_i^\dagger(t) \mathcal{D}_j(t) \right\rangle = \langle \mathcal{F}_i^\dagger(t) \widehat{O}_j(t) + \widehat{O}_i^\dagger(t) \mathcal{F}_j(t) \rangle . \quad (\text{D.7})$$

Levando em conta que para a ordem normal  $\mathcal{F}^\dagger, \mathcal{F}$ , se cumpre a seguinte relação (relações similares se cumprem para ordem antinormal):

$$\langle \mathcal{F}_i^\dagger(t) \mathcal{F}_j(t') \rangle = 2\mathcal{D}_{ij} \delta(t - t') , \quad (\text{D.8})$$

das Eqs.(D.4) e (D.5) vemos que:

$$\langle \mathcal{F}_i^\dagger(t) \widehat{O}_j(t) + \widehat{O}_i^\dagger(t) \mathcal{F}_j(t') \rangle = 2\mathcal{D}_{ij} \delta(t - t') , \quad (\text{D.9})$$

e também as *relações generalizadas de Eintein*:

$$2\mathcal{D}_{ij} = \langle \mathcal{D}(\widehat{O}_i^\dagger \widehat{O}_j) - \mathcal{D}_i^\dagger \widehat{O}_j - \widehat{O}_i^\dagger \mathcal{D}_j \rangle , \quad (\text{D.10})$$

onde  $\mathcal{D}(\widehat{O}_i^\dagger \widehat{O}_j)$  é o coeficiente de deriva correspondente à equação:

$$\frac{d}{dt} \langle \widehat{O}_i^\dagger(t) \widehat{O}_j(t) \rangle = \langle \mathcal{D}(\widehat{O}_i^\dagger \widehat{O}_j) \rangle . \quad (\text{D.11})$$

Esta última relação é muito útil para encontrar os coeficientes de difusão atômicos quando se conhece a álgebra dos operadores atômicos.

## D.1 Álgebra dos operadores atômicos

Os operadores atômicos do átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$ , representados pela Fig.5.1, usados para o estudo teórico da transparência induzida por

laser, EIT (Cap.5 e Cap.6), podem ser ordenados no seguinte vetor:

$$\mathbf{X}_{\text{at.}} = \begin{pmatrix} \sigma_{w1} \\ \sigma_{w2} \\ \sigma_1^- \\ \sigma_1^+ \\ \sigma_2^- \\ \sigma_2^+ \\ \sigma_{12}^- \\ \sigma_{12}^+ \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \\ |0\rangle\langle 0| - |2\rangle\langle 2| \\ |1\rangle\langle 0| \\ |0\rangle\langle 1| \\ |2\rangle\langle 0| \\ |0\rangle\langle 2| \\ |2\rangle\langle 1| \\ |1\rangle\langle 2| \end{pmatrix}. \quad (\text{D.12})$$

Este vetor, junto ao seu Hermitiano adjunto  $\mathbf{X}_{\text{at.}}^\dagger$ , nos permite obter a seguinte matriz com os produtos dos operadores atômicos  $\mathbf{X}_{\text{at.}} \cdot \mathbf{X}_{\text{at.}}^\dagger$ :

$$\begin{matrix} & \sigma_{w1} & \sigma_{w2} & \sigma_1^+ & \sigma_1^- & \sigma_2^+ & \sigma_2^- & \sigma_{12}^+ & \sigma_{12}^- \\ \sigma_{w1} & \left( \sigma_{00} + \sigma_{11} \right. & \sigma_{00} & \sigma_1^+ & -\sigma_1^- & \sigma_2^+ & 0 & -\sigma_{12}^+ & 0 \\ \sigma_{w2} & \sigma_{00} & \left. \sigma_{00} + \sigma_{22} \right) & \sigma_1^+ & 0 & \sigma_2^+ & -\sigma_2^- & 0 & -\sigma_{12}^- \\ \sigma_1^- & \sigma_1^- & \sigma_1^- & \sigma_{11} & 0 & \sigma_{12}^+ & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1^+ & -\sigma_1^+ & 0 & 0 & \sigma_{00} & 0 & 0 & \sigma_2^+ & 0 \\ \sigma_2^- & \sigma_2^- & \sigma_2^- & \sigma_{12}^- & 0 & \sigma_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2^+ & 0 & -\sigma_2^+ & 0 & 0 & 0 & \sigma_{00} & 0 & \sigma_1^+ \\ \sigma_{12}^- & -\sigma_{12}^- & 0 & 0 & \sigma_2^- & 0 & 0 & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{12}^+ & 0 & -\sigma_{12}^+ & 0 & 0 & 0 & \sigma_1^- & 0 & \sigma_{11} \end{matrix} \quad , \quad (\text{D.13})$$

de grande utilidade para calcular os coeficientes de difusão atômicos.

Com as informações acima apresentadas, vamos calcular, a modo de exemplo, o seguinte coeficiente de difusão  $\langle \hat{f}_{w1} \hat{f}_{w1} \rangle$ , a partir da seguinte expressão:

$$\langle \hat{f}_{w1} \hat{f}_{w1} \rangle = 2D_{w1w1}^{\text{O.N.}}, \quad (\text{D.14})$$

onde O.N. significa ordem normal.

Considerando a seguinte equação:

$$2D_{w1w1} = \left\langle \frac{d}{dt}(\sigma_{w1})^2 - \left( \frac{d}{dt} \sigma_{w1} \right) \sigma_{w1} - \sigma_{w1} \left( \frac{d}{dt} \sigma_{w1} \right) \right\rangle, \quad (\text{D.15})$$

onde, na ausência das forças de Langevin, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sigma_{w1})^2 &= \frac{d}{dt}(\sigma_{00} + \sigma_{11}) = -\frac{d}{dt} \sigma_{22} \\ &= -\Gamma_2 \sigma_{00} - \Gamma_{1 \rightarrow 2} \sigma_{11} + \Gamma_{2 \rightarrow 1} \sigma_{22} + ig_2 \sigma_2^- \hat{B}_2^\dagger - \\ &\quad - ig_2 \sigma_2^+ \hat{B}_2, \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\sigma_{w1}(t)\right)\sigma_{w1} &= \Gamma_1^{(1)}\sigma_{w1}\sigma_{w1} + \Gamma_2^{(1)}\sigma_{w2}\sigma_{w1} + \Gamma_3^{(1)}\sigma_{w1} + 2ig_1\sigma_1^-\widehat{B}_1^\dagger\sigma_{w1} - \\
&\quad - 2ig_1\sigma_1^+\widehat{B}_1\sigma_{w1} + ig_2\sigma_2^-\widehat{B}_2^\dagger\sigma_{w1} - ig_2\sigma_2^+\widehat{B}_2\sigma_{w1} \\
&= \Gamma_1^{(1)}(\sigma_{00} + \sigma_{11}) + \Gamma_2^{(1)}\sigma_{00} + \Gamma_3^{(1)}\sigma_{w1} + 2ig_1\sigma_1^-\widehat{B}_1^\dagger + \\
&\quad + 2ig_1\sigma_1^+\widehat{B}_1 + ig_2\sigma_2^-\widehat{B}_2^\dagger
\end{aligned} \tag{D.17}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{w1}\left(\frac{d}{dt}\sigma_{w1}(t)\right) &= \Gamma_1^{(1)}\sigma_{w1}\sigma_{w1} + \Gamma_2^{(1)}\sigma_{w1}\sigma_{w2} + \Gamma_3^{(1)}\sigma_{w1} + 2ig_1\sigma_{w1}\sigma_1^-\widehat{B}_1^\dagger - \\
&\quad - 2ig_1\sigma_{w1}\sigma_1^+\widehat{B}_1 + ig_2\sigma_{w1}\sigma_2^-\widehat{B}_2^\dagger - ig_2\sigma_{w1}\sigma_2^+\widehat{B}_2 \\
&= \Gamma_1^{(1)}(\sigma_{00} + \sigma_{11}) + \Gamma_2^{(1)}\sigma_{00} + \Gamma_3^{(1)}\sigma_{w1} - 2ig_1\sigma_1^-\widehat{B}_1^\dagger - \\
&\quad - 2ig_1\sigma_1^+\widehat{B}_1 - ig_2\sigma_2^-\widehat{B}_2^\dagger - ig_2\sigma_2^+\widehat{B}_2.
\end{aligned} \tag{D.18}$$

Somando as Eqs.(D.17) e (D.18), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\sigma_{w1}\right)\sigma_{w1} + \sigma_{w1}\left(\frac{d}{dt}\sigma_{w1}\right) &= 2\Gamma_1^{(1)}(\sigma_{00} + \sigma_{11}) + 2\Gamma_2^{(1)}\sigma_{00} + 2\Gamma_3^{(1)}\sigma_{w1} + \\
&\quad + ig_2\sigma_2^-\widehat{B}_2^\dagger - ig_2\sigma_2^+\widehat{B}_2.
\end{aligned} \tag{D.19}$$

Subtraindo a Eq.(D.19) da Eq.(D.16), chegamos a:

$$\begin{aligned}
2D_{w1w1} &= -\left[\Gamma_2 + 2\Gamma_1^{(1)} + 2\Gamma_2^{(1)}\right]\sigma_{00} - \left[\Gamma_{1\rightarrow 2} + 2\Gamma_1^{(1)}\right]\sigma_{11} + \\
&\quad + \Gamma_{2\rightarrow 1}\sigma_{22} - 2\Gamma_3^{(1)}\sigma_{w1},
\end{aligned} \tag{D.20}$$

da qual encontramos, considerando os operadores macroscópicos, a seguinte expressão para o coeficiente de difusão considerado:

$$\begin{aligned}
\langle\widehat{F}_{W1}(t)\widehat{F}_{W1}(t')\rangle &= \delta(t-t') \times \left\{ -\left[\Gamma_2 + 2\Gamma_1^{(1)} + 2\Gamma_2^{(1)}\right]\langle\widehat{P}_0(t)\rangle - \right. \\
&\quad - \left[\Gamma_{1\rightarrow 2} + 2\Gamma_1^{(1)}\right]\langle\widehat{P}_1(t)\rangle + \\
&\quad \left. + \Gamma_{2\rightarrow 1}\langle\widehat{P}_2(t)\rangle - 2\Gamma_3^{(1)}\langle\widehat{W}_1(t)\rangle \right\}. \tag{D.21}
\end{aligned}$$

Procedimentos análogos ao anterior nos permitem calcular os outros coeficientes de difusão das variáveis atômicas macroscópicas do sistema atômico

de três níveis, interagindo com dois campos e no estado estacionário. Os coeficientes de difusão não nulos são apresentados a seguir:

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{1,1} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_2 + 2\Gamma_1^{(1)} + 2\Gamma_2^{(1)}] \langle \widehat{P}_0(t) \rangle - [\Gamma_{1 \rightarrow 2} + 2\Gamma_1^{(1)}] \langle \widehat{P}_1(t) \rangle + \Gamma_{2 \rightarrow 1} \langle \widehat{P}_2(t) \rangle - 2\Gamma_3^{(1)} \langle \widehat{W}_1(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.22})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{2,2} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_1 + 2\Gamma_1^{(2)} + 2\Gamma_2^{(2)}] \langle \widehat{P}_0(t) \rangle - [\Gamma_{2 \rightarrow 1} + 2\Gamma_1^{(2)}] \langle \widehat{P}_2(t) \rangle + \Gamma_{1 \rightarrow 2} \langle \widehat{P}_1(t) \rangle - 2\Gamma_3^{(2)} \langle \widehat{W}_2(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.23})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{1,2} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)} + \Gamma_2^{(1)} + \Gamma_2^{(2)}] \langle \widehat{P}_0(t) \rangle - \Gamma_1^{(2)} \langle \widehat{P}_1(t) \rangle - \Gamma_2^{(1)} \langle \widehat{P}_2(t) \rangle - \Gamma_3^{(2)} \langle \widehat{W}_1(t) \rangle - \Gamma_3^{(1)} \langle \widehat{W}_2(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.24})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{2,1} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)} + \Gamma_2^{(1)} + \Gamma_2^{(2)}] \langle \widehat{P}_0(t) \rangle - \Gamma_1^{(2)} \langle \widehat{P}_1(t) \rangle - \Gamma_2^{(1)} \langle \widehat{P}_2(t) \rangle - \Gamma_3^{(2)} \langle \widehat{W}_1(t) \rangle - \Gamma_3^{(1)} \langle \widehat{W}_2(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.25})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{4,7} = \delta(t - t') \times \Gamma_{12} \langle \widehat{S}_2^+(t) \rangle, \quad (\text{D.26})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{7,4} = \delta(t - t') \times \Gamma_{12} \langle \widehat{S}_2^-(t) \rangle, \quad (\text{D.27})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{4,1} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(1)} - \Gamma_1^{(1)}] \langle \widehat{S}_1^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.28})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{1,4} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(1)} - \Gamma_1^{(1)}] \langle \widehat{S}_1^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.29})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{4,2} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(2)} - \Gamma_1^{(2)}] \langle \widehat{S}_1^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.30})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{2,4} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(2)} - \Gamma_1^{(2)}] \langle \widehat{S}_1^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.31})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{6,1} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(1)} - \Gamma_2^{(1)}] \langle \widehat{S}_2^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.32})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{1,6} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(1)} - \Gamma_2^{(1)}] \langle \widehat{S}_2^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.33})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{6,2} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(2)} - \Gamma_2^{(2)}] \langle \widehat{S}_2^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.34})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{2,6} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(2)} - \Gamma_2^{(2)}] \langle \widehat{S}_2^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.35})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{6,8} = \delta(t - t') \times \Gamma_{12} \langle \widehat{S}_1^+(t) \rangle, \quad (\text{D.36})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{8,6} = \delta(t - t') \times \Gamma_{12} \langle \widehat{S}_1^-(t) \rangle, \quad (\text{D.37})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{8,1} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(1)} - \Gamma_2^{(1)}] \langle \widehat{S}_{12}^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.38})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{1,8} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(1)} - \Gamma_2^{(1)}] \langle \widehat{S}_{12}^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.39})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{8,2} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(2)} - \Gamma_2^{(2)}] \langle \widehat{S}_{12}^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.40})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{2,8} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(2)} - \Gamma_2^{(2)}] \langle \widehat{S}_{12}^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.41})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{8,8} = \delta(t - t') \times \left\{ \Gamma_1 \langle \widehat{P}_0(t) \rangle + [2\Gamma_{12} - \Gamma_{1 \rightarrow 2}] \langle \widehat{P}_1(t) \rangle + \Gamma_{2 \rightarrow 1} \langle \widehat{P}_2(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.42})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{3,3} = \delta(t - t') \times \left\{ \Gamma_1 \langle \widehat{P}_0(t) \rangle + [\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_{1 \rightarrow 2}] \langle \widehat{P}_1(t) \rangle + \Gamma_{2 \rightarrow 1} \langle \widehat{P}_2(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.43})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{3,2} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_1^{(2)} + \Gamma_2^{(2)} + \Gamma_3^{(2)}] \langle \widehat{S}_1^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.44})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{2,3} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_1^{(2)} + \Gamma_2^{(2)} + \Gamma_3^{(2)}] \langle \widehat{S}_1^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.45})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{3,1} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_2^{(1)} + \Gamma_3^{(1)}] \langle \widehat{S}_1^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.46})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{1,3} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_2^{(1)} + \Gamma_3^{(1)}] \langle \widehat{S}_1^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.47})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{3,5} = \delta(t - t') \times \left\{ [\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_{12}] \langle \widehat{S}_{12}^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.48})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{5,3} = \delta(t - t') \times \left\{ [\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_{12}] \langle \widehat{S}_{12}^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.49})$$



$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{5,1} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_2^{(1)} + \Gamma_3^{(1)}] \langle \widehat{S}_2^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.50})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{1,5} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_2^{(1)} + \Gamma_3^{(1)}] \langle \widehat{S}_2^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.51})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{5,2} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_1^{(2)} + \Gamma_2^{(2)} + \Gamma_3^{(2)}] \langle \widehat{S}_2^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.52})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{2,5} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_1^{(2)} + \Gamma_2^{(2)} + \Gamma_3^{(2)}] \langle \widehat{S}_2^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.53})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{7,1} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(1)} - \Gamma_1^{(1)}] \langle \widehat{S}_{12}^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.54})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{1,7} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(1)} - \Gamma_1^{(1)}] \langle \widehat{S}_{12}^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.55})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{7,2} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(2)} - \Gamma_1^{(2)}] \langle \widehat{S}_{12}^-(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.56})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{2,7} = \delta(t - t') \times \left\{ - [\Gamma_3^{(2)} - \Gamma_1^{(2)}] \langle \widehat{S}_{12}^+(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.57})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{7,7} = \delta(t - t') \times \left\{ \Gamma_2 \langle \widehat{P}_0(t) \rangle + \Gamma_{1 \rightarrow 2} \langle \widehat{P}_1(t) \rangle + [2\Gamma_{12} - \Gamma_{2 \rightarrow 1}] \langle \widehat{P}_2(t) \rangle \right\}, \quad (\text{D.58})$$

$$[\mathcal{D}_{\text{At.}}]_{5,5} = \delta(t - t') \times \left\{ \Gamma_2 \langle \widehat{P}_0(t) \rangle + \Gamma_{1 \rightarrow 2} \langle \widehat{P}_1(t) \rangle + [\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_{2 \rightarrow 1}] \langle \widehat{P}_2(t) \rangle \right\}. \quad (\text{D.59})$$



# Bibliografia

- [1] E. Arimondo. Coherent population trapping in laser spectroscopy. volume V, page 257, Ed. E. Wolf, 1996. Progress in Optics XXXV-Elsevier Science B V.
- [2] C. L. Garrido Alzar. *Estudo de propriedades quânticas dos feixes sonda e de bombeio na transparência induzida por laser*. PhD thesis, Instituto de Física–Universidade de São Paulo–Brasil, 2002.
- [3] C. L. Garrido Alzar, L. S. Cruz, J. G. Aguirre Gómez, M. França Santos, and P. Nussenzveig. *Europhys. Lett.*, 61:485, 2003.
- [4] T. Yabuzaki, T. Mitsui, and U. Tanaka. *Phys. Rev. Lett.*, 67:2453, 1991.
- [5] K. Peterman. *Laser Diode Modulation and Noise*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [6] T. C. Zhang, J. Ph. Poizat, P. Grelu, J. F. Roch, P. Grangier, F. Marin, A. Bramati, V. Jost, M. D. Levenson, and E. Giacobino. *Quantum Semiclass. Opt.*, 7:601, 1995.
- [7] R. Walser and P. Zoller. *Phys. Rev. A*, 49:5067, 1994.
- [8] D. H. McIntyre, C. E. Fairchild, J. Cooper, and R. Walser. *Opt. Lett.*, 18:1816, 1994.
- [9] M. Bahoura A. Clairon. *Opt. Lett.*, 26:926, 2001.
- [10] P. Meystre and M. Sargent III. *Elements of Quantum Optics*. Springer-Verlag, 1999.
- [11] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [12] R. Walser, J. Cooper, and P. Zoller. *Phys. Rev. A*, 50:4303, 1994.
- [13] M. Sargent III, M. O. Scully, and W. E. Lamb Jr. *Laser Physics*. Adison-Wesley, 1974.

- 
- [14] D. F. Walls and G. J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer-Verlag, 1994.
- [15] A. Lambrecht, J. M. Courty, and S. Reynaud. *J. Phys. II France*, 6:1133, 1996.
- [16] S. Gasiorowicz. *Quantum Physics*. John Wiley & Sons Inc., 1996.
- [17] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [18] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, and C. Fabre. Progress in optics xxx. page 1, North-Holland, Amsterdam, 1992. Ed. E. Wolf.
- [19] R. J. Glauber. *Phys. Rev.*, 131:2766, 1963.
- [20] H. Bachor. *A Guide to Experiments in Quantum Optics*. John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [21] B. L. Schumaker. *Opt. Lett.*, 9:189, 1984.
- [22] P. Galatola, A. Lugiato, M. G. Porreca, P. Tombesi, and G. Leuchs. *Opt. Commun.*, 85:95, 1991.
- [23] P. Garcia-Fernández, A. Lugiato, F. Bermejo, and P. Galatola. *Quant. Opt.*, 2:49, 1990.
- [24] G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols. *Nuovo Cimento B*, 36:5, 1976.
- [25] R. M. Whitley and C. R. Stroud Jr. *Phys. Rev. A*, 14:1498, 1976.
- [26] H. R. Gray, R. M. Whitley, and C. R. Stroud Jr. *Opt. Lett.*, 3:218, 1978.
- [27] E. Arimondo and G. Orriols. *Lett. Nuovo Cimento*, 17:333, 1976.
- [28] G. P. Agrawal. *Phys. Rev. A*, 24:1399, 1981.
- [29] R. E. Tench, B. W. Peuse, P. R. Hemmer, J. E. Thomas, S. Ezekiel, C. C. Leiby Jr., R. H. Picard, and C. R. Willis. *J. Phys. Colloq.*, 42:C8, 1981.
- [30] J. E. Thomas, P. R. Hemmer, S. Ezekiel, C. C. Leiby Jr. R. H. Picard, and C. R. Willis. *Phys. Rev. Lett.*, 48:867, 1982.
- [31] D. F. Walls and P. Zoller. *Opt. Commun.*, 34:260, 1980.
- [32] J. Mlynek, F. Mitschke, R. Deserno, and W. Lange. *Appl. Phys. B*, 28:135, 1982.

- [33] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vanteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji. *Phys. Rev. Lett.*, 61:826, 1988.
- [34] B. J. Dalton and P. L. Knight. volume 182, page 213, Eds. J. D. Harvey and D. F. Walls, Springer-Berlin, 1983. *Laser Physics, Lecture Notes in Physics*.
- [35] H. I. Yoo and J. H. Eberly. *Phys. Rep.*, 118:239, 1985.
- [36] E. Arimondo. page 343, Eds. G. Alzetta, E. Arimondo, F. Bassani and L. Radicati. Scuola Normale–Pisa, 1987. *Interaction of Radiation with Matter, a Volume in Honor of Adriano Gozzini*.
- [37] B. D. Agap'ev, M. B. Gornyi, and B. G. Matisov. *Physics-Uspokhi*, 36:763, 1993.
- [38] G. Orriols. *Nuovo Cimento B*, 53:1, 1979.
- [39] G. W. Series. *Phys. Rep.*, 43:1, 1978.
- [40] B. Glushko and B. Kryzhanovsky. *Phys. Rev. A*, 46:2823, 1992.
- [41] C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud. *J. Phys. B*, 10:2311, 1977.
- [42] P. M. Radmore and P. L. Knight. *J. Phys. B*, 15:561, 1982.
- [43] S. Swain. *J. Phys. B*, 15:3405, 1982.
- [44] J. Dalibard, S. Reynaud, and C. Cohen-Tannoudji. page 29, Eds. G. Alzetta, E. Arimondo, F. Bassani and L. Radicati. Scuola Normale–Pisa, 1987. *Interaction of Radiation with Matter, a Volume in Honor of Adriano Gozzini*.
- [45] C. Cohen-Tannoudji, C. B. Zambom, and E. Arimondo. *J. Opt. Soc. Am. B*, 10:2107, 1993.
- [46] O. A. Kocharovskaya and Y. I. Khannin. *JETP Lett.*, 48:630, 1988.
- [47] S. E. Harris. *Phys. Rev. Lett.*, 62:1033, 1989.
- [48] S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoglu. *Phys. Rev. Lett.*, (64):1107, 1990.
- [49] Y. Q. Li and M. Xiao. *Phys. Rev. A*, 51:4959, 1995.
- [50] M. Xiao, Y. Q. Li, S. C. Jin, and Gea-Banacloche. *Phys. Rev. Lett.*, 74:666, 1995.

- 
- [51] S. A. Hopkins, E. Usadi, H. X. Chen, and A. V. Durrant. *Opt. Commun.*, (138):185, 1997.
- [52] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi. *Nature*, 397:594, 1999.
- [53] M. M. Kash. *Phys. Rev. Lett.*, 82:5299, 1999.
- [54] D. Budker, D. J. Orlando, and V. Yashchuk. *Am. J. Phys.*, 67:584, 1999.
- [55] L. Chien, Z. Dutton, C. H. Behroozi, and L. V. Hau. *Nature*, 409:490, 2001.
- [56] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walswort, and M. D. Lukin. *Phys. Rev. Lett.*, 86:783, 2001.
- [57] M. D. Lukin and A. Imamoglu. *Nature*, 413:273, 2001.
- [58] E. A. Cornel. *Nature*, 409:461, 2001.
- [59] G. S. Agarwal. *Phys. Rev. Lett.*, 71:1351, 1993.
- [60] M. Jain. *Phys. Rev. A*, 50:1899, 1993.
- [61] G. Grinberg, A. Apect, and C. Fabre. *Introduction aux Lasers et à L'optique Quantique*. ellipses-édition marketing S. A., 1997.
- [62] K. B. MacAdam, A. Steinbach, and C. Wieman. *Am. J. Phys.*, 60:1098, 1999.
- [63] K. Razdan and D. A. Van Baak. *Am. J. Phys.*, 67:832, 1999.
- [64] F. E. Rosa Campolin. Resfriamento e aprisionamento magneto-ótico de átomos de rubídio. Master's thesis, Instituto de Física-Universidade de São Paulo-Brasil, 2001.
- [65] S. Nakayama. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 23:879, 1984.
- [66] M. Fleischhauer, U. Rathe, and M. O. Scully. *Phys. Rev. A*, 46:5856, 1992.
- [67] M. Martinelli, P. Valente, H. Failache, D. Feleinto, L. S. Cruz, P. Nussenzveig, and A. Lezama. *A ser publicado em Phys. Rev. A*, 2004.
- [68] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupon-Roc, and G. Grynberg. *Atom-Photon Interaction: Basic Processes and Applications*. John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [69] J. M. Courty and S. Reynaud. *Phys. Rev. A*, 46:2766, 1992.

- 
- [70] L. Davidovich. *Rev. of Mod. Phys.*, 68:127, 1996.
- [71] A. Lezama, S. Barreiro, and A. M. Akulshin. *Phys. Rev A*, 59:4732, 1999.
- [72] A. M. Akulshin, S. Barreiro, and A. Lezama. *Phys. Rev A*, 57:2996, 1998.
- [73] A. Lezama, S. Barreiro, A. Lipsich, and A. M. Akulshin. *Phys. Rev A*, 6001:3801, 2000.
- [74] G. C. Bjorklund, M. D. Levenson, L. Lenth, and C. Ortiz. *Appl. Phys. B*, 32:145, 1983.
- [75] B. R. Mollow. *Phys. Rev.*, 175:1555, 1968.
- [76] D. S. Elliott, M. W. Hamilton, K. Arnet, and S. J. Smith. *Phys. Rev. A*, 32:887, 1985.
- [77] S. N. Dixit, P. Zoller, and P. Lambropoulos. *Phys. Rev. A*, 21:1289, 1980.
- [78] M. H. Anderson, R. D. Jones, J. Cooper, S. J. Smith, D. S. Elliott, H. Ritsch, and P. Zoler. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1346, 1990.
- [79] M. H. Anderson, R. D. Jones, J. Cooper, S. J. Smith, D. S. Elliott, H. Ritsch, and P. Zoler. *Phys. Rev. A*, 42:6690, 1990.
- [80] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [81] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastics Methods*. Springer Verlag, 1985.
- [82] L. Hilico. *Reduction Du Bruit Qnatique De La Lumiere Par Une Cavite Biestable*. PhD thesis, Universite Pierre et Marie Curie–Paris VI, 1992.
- [83] L. Vernac. *Etude expérimentale et théorique des fluctuations quantiques de champs et d'atomes couplés en cavite*. PhD thesis, Universite Pierre et Marie Curie–Paris VI, 2001.